Homologikus algebra **6. feladatsor** *2017 ősz*

1. Bizonyítsuk be, hogy a $G = \mathrm{Hom}_R(-, M)$ funktor balegzakt, azaz R-modulusok bármely $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ rövid egzakt sorozatára $0 \to G(Z) \to G(Y) \to G(X)$ egzakt.

Egy kategória preadditív, ha $\mathrm{Hom}(A, B)$ *Abel-csoport minden* A, B *objektumra, és a morfizmusok kompozíciója mindkét oldalról disztributív az összeadással. Egy preadditív kategória additív, ha van benne zéróobjektum: olyan, amelyikbe és amelyikből mindenhonnan és mindenhova egyetlen morfizmus megy, és bármely két objektumnak van szorzata. Az 5./3. feladat bizonyításából következik, hogy ekkor koszorzatuk is van, és az izomorf a szorzatukkal.*

2. Bizonyítsuk be, hogy az 1. feladatbeli G funktor akkor és csak akkor egzakt, ha M injektív.

3. Bizonyítsuk be, hogy a lánckomplexusok *Comp-R* kategóriája additív kategória.

4. Legyen A az a gráfalgebra, amelyre a reguláris modulus Loewy-diagramja

$$A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}.$$

Tekintsük a $0 \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \end{smallmatrix} \to 0$ sorozatot, ahol mindegyik morfizmus a legnagyobb rangú olyan homomorfizmus (azaz a képe vektortérként maximális dimenziós), ami a Loewy-diagramokban használt báziselemeket báziselemekbe vagy 0-ba viszi. Határozzuk meg a sorozat homológiáit!

5. Legyen $\xi: \ 0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ sorozat mod-R-ben. Bizonyítsuk be, hogy a következő állítások ekvivalensek:
(i) ξ egzakt, és $\mathrm{Im}\,\alpha$ direkt összeadandó Y-ban (így $Y \cong X \oplus Z$);
(ii) ξ egzakt, és $\exists \alpha' : Y \to X$, hogy $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$;
(iii) ξ egzakt, és $\exists \beta' : Z \to Y$, hogy $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$;
(iv) $\exists \alpha : Y \to X$ és $\beta' : Z \to Y$, hogy $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$, $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$, $\alpha\beta = 0$, $\beta'\alpha' = 0$, és $\alpha'\alpha + \beta\beta' = \mathrm{id}_Y$.
Ilyenkor a ξ sorozatot *felhasadó* rövid egzakt sorozatnak hívjuk.

Hf1. Határozzuk meg az összes olyan α, β homomorfizmust, amelyre a $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2 \to 0$ sorozat féligegzakt, és adjuk meg minden esetben a homológiákat!

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy egy $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ féligegzakt sorozat akkor és csak akkor homotóp a csupa-0 sorozattal, ha felhasadó egzakt.