Homologikus algebra **7. feladatsor** *2017 ősz*

1. (3×3-lemma) Tegyük fel, hogy az alábbi kommutatív diagram sorai egzaktak.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & X' & \to & Y' & \to & Z' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & X & \to & Y & \to & Z & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & X'' & \to & Y'' & \to & Z'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

a) Bizonyítsuk be, hogy ha a középső oszlop egzakt, akkor első oszlop akkor és csak akkor egzakt, ha a harmadik az.

b) Mutassuk meg, hogy az első és utolsó oszlop egzaktságából együtt sem következik, hogy a középső oszlop egzakt.

2. Tekintsük a következő kommutatív diagramot, amelynek a sorai egzaktak.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \to & X_n & \overset{i_n}{\to} & Y_n & \overset{p_n}{\to} & Z_n & \overset{\partial_n}{\to} & X_{n-1} & \overset{i_{n-1}}{\to} & Y_{n-1} & \to & \cdots \\
 & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \beta_n & & \downarrow \gamma_n & & \downarrow \alpha_{n-1} & & \downarrow \beta_{n-1} & & \\
\cdots & \to & X'_n & \overset{i'_n}{\to} & Y'_n & \overset{p'_n}{\to} & Z'_n & \overset{\partial'_n}{\to} & X'_{n-1} & \overset{i'_{n-1}}{\to} & Y'_{n-1} & \to & \cdots
\end{array}$$

Bizonyítsuk be, hogy ha γ_n izomorfizmus, akkor létezik egy egzakt sorozat:

$$\cdots \to X_n \xrightarrow{(\alpha_n, i_n)} X'_n \oplus Y_n \xrightarrow{i'_n - \beta_n} Y'_n \xrightarrow{p'_n \gamma_n^{-1} \partial_n} X_{n-1} \to X'_{n-1} \oplus Y_{n-1} \to Y'_{n-1} \cdots$$

3. (5-lemma) Tegyük fel, hogy a következő kommutatív diagram sorai egzaktak.

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \to & B & \to & C & \to & D & \to & E \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\
A' & \to & B' & \to & C' & \to & D' & \to & E'
\end{array}$$

Mutassuk meg, hogy

a) ha α epimorfizmus, és β és δ monomorfizmusok, akkor γ monomorfizmus;

b) ha ε monomorfizmus, és β és δ epimorfizmusok, akkor γ epimorfizmus.

c) ha α, β, δ és ε izomorfizmusok, akkor γ is izomorfizmus.

Hf1. Bizonyítsuk be a komplexusok $0_\bullet \to X_\bullet \to Y_\bullet \to Z_\bullet \to 0_\bullet$ rövid egzakt sorozatához tartozó hosszú egzakt sorozatban az egzaktságot $\mathrm{H}_n(Y_\bullet)$-nál!

Hf2. Tekintsük az $f_\bullet$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \to & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \rightarrowtail & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \rightarrowtail & \mathbb{Z}_4 & \to & \cdots \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow 0 & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow 0 & & \\
\cdots & \to & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \to & \cdots
\end{array}$$

láncleképezést, ahol a felső lánckomplexus $X_\bullet$, az alsó $Y_\bullet$.
Határozzuk meg a $0_\bullet \to \mathrm{Ker}\, f_\bullet \to X_\bullet \to Y_\bullet \to 0_\bullet$ rövid egzakt sorozathoz tartozó hosszú egzakt sorozatot!