1. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathrm{Hom}_R(R, M)$ jobb R-modulus minden $M \in$ Mod-R-re, és lássuk be, hogy $\mathrm{Hom}_R(R, -)$ additív, kovariáns funktor, amely természetesen izomorf az identitás funktorral!

2. Egy R gyűrű *öröklődő*, ha minden injektív modulus minden homomorf képe injektív. (Pl. $\mathbb{Z}$ öröklődő.) Bizonyítsuk be, hogy ha R öröklődő, akkor minden $M, N \in R$-mod modulusra $\mathrm{Ext}^k_R(M, N) = 0$, ha $k > 1$.

3. Legyen $0 \to K_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ egzakt, és tegyük fel, hogy itt P_i projektív minden i-re. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Ext}^{n+k}_R(M, N) \cong \mathrm{Ext}^k_R(K_n, N)$ minden $k \geq 1$-re!

4. Tegyük fel, hogy az A gráfalgebra reguláris modulusának Loewy-diagramja $A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & & 4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}$.

a) Határozzuk meg $\mathrm{Ext}^3_A(\begin{smallmatrix} 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \end{smallmatrix})$ dimenzióját.

b) Számoljuk ki $\dim \mathrm{Ext}^3_A(\begin{smallmatrix} 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$-et!

c) Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re létezik $k > n$, hogy $\dim \mathrm{Ext}^k_A(\begin{smallmatrix} 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \neq 0$.

5. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_4$. Határozzuk meg $\mathbb{Z}_4$-nek $\mathbb{Z}_4$-gyel vett bővítéseit ekvivalencia erejéig! Hányadrendű elemeknek felelnek meg ezek az $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$-ben mint Abel-csoportban?

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy egy additív kovariáns funktor akkor és csak akkor visz minden rövid egzakt sorozatot jobbról egzaktba ($0 \to X \to Y \to Z \to 0$ egzakt $\Rightarrow F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ egzakt), ha minden egzakt $X \to Y \to Z \to 0$ sorozatra az $F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ sorozat egzakt.

Hf2. Határozzuk meg az $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3)$ csoportot, és adjuk meg $\mathbb{Z}_3$-nak $\mathbb{Z}_3$-mal két egymással nem ekvivalens, nem felhasadó bővítését!