1. *a) Határozzuk meg az összes egységelemes 2-dimenziós algebrát $\mathbb{Z}_2$ fölött izomorfia erejéig! Keressünk velük izomorf mátrixalgebrákat!*

b) Egy 2-dimenziós (nem feltétlenül egységelemes) $\mathbb{Z}_2$ fölötti algebra $\{a, b\}$ bázisára $a^2 = ab = a$ és $b^2 = b$. Mi lehet a ba szorzat? Minden izomorfiatípushoz adjunk megfelelő mátrixalgebrát!

Megoldás: a) Választhatunk egy, az 1-et tartalmazó bázist: $\{1, a\}$. Ezen három szorzat egyértelmű: $1 \cdot 1 = 1$ és $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, tehát csak az $a \cdot a$ értékét kell kiválasztani az algebra négy eleme, 0, 1, a és $1 + a$ közül. Bármelyiket választjuk is, a szorzástábla disztributív kiterjesztése által kapott szorzás asszociatív lesz: ha szerepel egy báziselemekből álló háromtényezős szorzatban az 1, akkor az mindkét oldalon elnyelődik, ha nem, akkor pedig $a^2 \cdot a = a \cdot a^2$ teljesül, minthogy a részleges szorzástáblából is kiderül, hogy az algebra kommutatív.

Mátrixalgebraként is megkaphatjuk a négy algebrát, ha 1 helyett az I egységmátrixot, a helyett pedig rendre a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, illetve $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixot választjuk. (Az, hogy ezek kielégítik a szorzástáblát, szintén mutatja, hogy a táblázat által definiált algebra asszociatív.)

A felsorolt négy algebra közül az első kettő izomorf: az $1 \to 1$, $a \to 1 + a$ leképezés könnyen ellenőrizhető módon izomorfizmust ad meg. A harmadik és negyedik sem ezekkel, sem egymással nem izomorf: a harmadiknak csupa idempotens eleme van (amelyeknek a négyzete önmagával egyenlő), a negyedik pedig test: a és $1 + a$ egymás inverzei.

b) Itt a ba értékét kell meghatározni úgy, hogy a báziselemekre teljesüljön a szorzat asszociativitása. $a(ba) = (ab)a = a^2 = a$, tehát az eddigi szorzatok alapján $ba \neq 0$, $a + b$. A másik két esetet viszont elő tudjuk állítani mátrixalgebrával. $ba = a$ esetén az a) rész egyik algebráját kapjuk, ahol a lesz az egységelem, $ba = b$ esetén pedig az $a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ és $b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixok által generált algebra mutatja, hogy a kapott algebra asszociatív, viszont mivel nem kommutatív, nem lehet izomorf az előzővel.

2. *Legyen $M \in$ Mod-R, azaz M jobb oldali R-modulus, B balideálja, J jobbideálja R-nek, $a \in M$ és U, V részmodulusok M-ben. Az alábbiak közül melyikek lesznek feltétlenül részmodulusai M-nek? (Az összegek komplexusösszegeket, a szorzatok a komplexusszorzat elemeiből alkotott összegek hamazát jelentik, és $\mathrm{Ann}_M(H) = \{ m \in M \mid mh = 0 \ \forall h \in H \}$ a $H \subseteq R$ részhalmaz annullátora M-ben.)*

a) aR *b)* aB *c)* aJ *d)* $U \cap V$ *e)* $U \cup V$
f) $U + V$ *g)* $\mathrm{Ann}_M(B)$ *h)* $\mathrm{Ann}_M(J)$ *i)* UB *j)* UJ.

Megoldás: a) aR részmodulus, a c) speciális esete.

b) aB nem részmodulus, pl. legyen $R = \mathbb{R}^{n \times n}$, B álljon azokból a mátrixokból, amelyeknek az első oszlopán kívül nincs nemnulla eleme, $M = R$, és $a = I_n$.

c) aJ részmodulus: $aj + aj' = a(j + j') \in aJ$, $(aj)r = a(jr) \in aJ$.

d) $U \cap V$ részmodulus: ha $v, v' \in U \cap V$, akkor U-ban és V-ben is benne vannak, tehát $v + v'$ és minden vr benne van U-ban és V-ben, így a metszetükben is.

e) $U \cup V$ nem részmodulus, már vektorterekre sem: R^2-ben az x tengely, illetve az y tengely vektorai alteret alkotnak, de az uniójuk nem zárt az összegre.

f) $U + V$ részmodulus: $(u + v) + (u' + v') = (u + u') + (v + v') \in U + V$, és $(u + v)r = ur + vr \in U + V$.

g) $\mathrm{Ann}_M(B)$ részmodulus: ha $mb = m'b = 0$ minden $b \in B$-re, akkor $(m + m')b = mb + m'b = 0$ és $(mr)b = m(rb) = 0$ minden $r \in R$-re, ugyanis $rb \in B$.

h) $\mathrm{Ann}_M(J)$ nem feltétlenül részmodulus. Legyen $R = \mathbb{R}^{n\times n}$, mint a b) részben, J álljon azokból a mátrixokból, amelyeknek az első során kívül csak 0 elemei vannak, és $M = \mathbb{R}^n$ álljon sorvektorokból. Ekkor $\mathrm{Ann}_M(J)$ azokból a sorvektorokból áll, amelyeknek az első eleme 0, de ezek nem alkotnak részmodulust (M_R különben is egyszerű).

i) Nem részmodulus. Legyen $R = \mathbb{R}^{n\times n}$, $U = M = R^n$ álljon az n-dimenziós sorvektorokból, és legyen B azon mátrixok halmaza, amelyeknek az első oszlopán kívül csupa 0 eleme van. Ekkor $UB = \{[x, 0, \dots, 0] \mid x \in \mathbb{R}\}$, ami nem részmodulus.

j) Részmodulus.

3. *a) Legyen $1 \in S \le R$. Bizonyítsuk be, hogy minden R-modulus S-modulus is, de fordítva nem igaz.*

b) Legyen $I \lhd R$. Mi a kapcsolat az R-modulusok és az R/I-modulusok között?

Megoldás: a) Az nyilvánvaló, hogy egy R-modulus az S-beli elemekkel való szorzásra is zárt. A fordított irányt többféleképpen lehet értelmezni. Egyrészt egy R-modulus S-részmodulusa nem feltétlenül R-részmodulus (pl. $\mathbb{R}_\mathbb{R}$-nek $\mathbb{Z}$-részmodulusa $\mathbb{Z}$, de nyilván nem $\mathbb{R}$-részmodulusa), másrészt egy S-moduluson többnyire nem lehet úgy definiálni az R-beli elemekkel való szorzást, hogy az eredeti modulusműveleteket megtartsuk, és R-modulust kapjunk, pl. $R = \mathbb{R}$, $S = \mathbb{Z}$ esetén $M = \mathbb{Z} \le \mathbb{R}_\mathbb{Z}$ nyilván nem tehető $\mathbb{R}$-modulussá, mert a számossága is túl kicsi.

b) Minden R/I-modulus R-modulus is (az $mr := m(r+I)$ szorzással), és egy R-modulus, M pontosan akkor R/I-modulus, ha $MI = 0$ (ekkor az $m(r+I) = mr$ szorzat jól van definiálva, és az axiómák teljesülése következik az R-modulus tulajdonságaiból).

4. *Hány részmodulusa van az alábbi modulusoknak, és azok hány izomorfiaosztályba tartoznak?*

a) $\mathbb{R}^4$ mint $\mathbb{R}$-modulus.

b) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$ mint $\mathbb{Z}$-modulus.

c) A 2-elemű test fölötti 3×3-as mátrixok gyűrűje, $\mathbb{F}_2^{3\times 3}$, önmaga fölött.

Megoldás: a) A test fölötti modulusok vektorterek, és $\mathbb{R}^4$-ben már egy dimenziós altérből is végtelen sok van. Viszont az azonos dimenziós alterek mind izomorfak egymással, így az izomorfiatípusuk csak ötféle lehet.

b) Véges Abel-csoportoknak minden p prímhez egyetlen p-Sylow-részcsoportjuk van, amely tartalmazza az összes p-hatványrendű elemet. Így $G = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$-nek minden H részcsoportja $H = P \oplus Q$ alakú, ahol $P \le \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ és $Q \le \mathbb{Z}_5$. Q nyilván csak kétféle lehet. $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ negyedrendű elemet tartalmazó valódi részcsoportjaiból ($\cong \mathbb{Z}_4$) csak $\frac{2\cdot 2}{2}$ darab van (a negyedrendű elemekből 2-2 ugyanazt a részcsoportot generálja), a többi valódi részcsoport a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ öt részcsoportjának valamelyike. Így a G csoportnak összesen $(1 + 2 + 5) \cdot 2 = 16$ részcsoportja van, és ezek $5 \cdot 2 = 10$ izomorfiatípushoz tartoznak ($P \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2$ vagy 0, és $Q \cong \mathbb{Z}_5$ vagy 0).

c) Legyen $R = K^{3\times 3}$, ahol $K = \mathbb{F}_2$. Az R_R részmodulusai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők a bennük levő mátrixok oszlopai által generált altereknek a $K^3 = \mathbb{F}_2^3$-ben a következő módon. Legyen $e_1 = E_{11}$ az a mátrix, amelynek egyetlen nem 0 eleme az $(1,1)$ helyen álló 1. Ekkor Re_1 azokból a mátrixokból áll, amelyeknek az első oszlopán kívül minden eleme 0, tehát $(Re_1)_K \cong K^3$, továbbá $Re_1R = R$. $M \le R_R$-re $Me_1 \le (Re_1)_K$, míg $V = Ve_1 \le (Re_1)_K$-ra $Ve_1R \le R_R$. Ez a két leképezés egymás inverze: $Me_1R = MRe_1R = MR = M$, és $Ve_1Re_1 = Ve_1$. Tehát R_R részmodulusainak száma a K^3 vektortér altereinek száma, azaz $1{+}7{+}7{+}1 = 16$. Rádasásul $M \cong N$ akkor és csak akkor, ha $Me_1 \cong Ne_1$ (azaz, ha $\dim_K Me_1 = \dim_K Ne_1$), mert mindegyik izomorfizmust egy invertálható mátrixszal való balszorzás valósítja meg (a modulus-izomorfizmusok $K^{3\times 3}$ fölött egyúttal vektortér-izomorfizmusok is, és egy $r \in R$ elemmel való balszorzás mindig modulus-homomorfizmus), így a részmodulusoknak 4 izomorfiatípusa van.

5. *Legyen A algebra a K test fölött, és legyen M modulus A fölött.*

a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\dim_K M < \infty$, akkor M végesen generált mint modulus, de fordítva nem igaz a következtetés.

b) Lássuk be, hogy ha $\dim_K A < \infty$, és M végesen generált modulus A fölött, akkor $\dim_K M < \infty$.

Megoldás: a) Az M modulus K-bázisa nyilván generátorrendszere M-nek mint modulusnak. Másik irányban nem igaz: legyen M egy megszámlálható dimenziós vektortér $\{ b_1, b_2, \dots \}$ bázissal. Legyen $\varphi \in \operatorname{End}(M)$ az az endomorfizmus, amely minden b_i báziselemet b_{i+1}-be visz, is legyen A az $\operatorname{End}(M)$-nek a φ által generált részalgebrája. Ekkor M-et mint A-modulust generálja a b_1 elem, tehát nemcsak végesen generált, hanem ciklikus is, de vektortérként végtelen dimenziós.

b) Ha $\{ u_1, \dots, u_m \}$ az M_A egy generátorrendszere, és $\{ b_1, \dots, b_n \}$ az A_K egy bázisa, akkor minden $u \in M$ felírható $\sum_{i=1}^{n} u_i a_i$ alakban, ahol $a_i \in A$ minden i-re, viszont az a_i elemek felírhatók $a_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} b_j$ alakban, így $u = \sum_{i,j} \lambda_{ij} u_i b_j$. Tehát $\{ u_i b_j \mid i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m \}$ generálja M-et mint vektorteret, és ennek egy alkalmas részhalmaza bázisa M_K-nak.

6. *Tekintsük a $K[x]$ polinomgyűrű fölötti n-dimenziós modulusokat, ahol K test. A modulus egy bázisát rögzítve feleltessük meg a modulusnak azt a mátrixot, amely az x hatását adja meg az adott bázisban.*

a) Mikor lesz ez a modulus egyszerű?

b) Mit jelent a mátrixokra nézve az, hogy két modulus izomorf?

c) Megadhatjuk-e ezeket a modulusokat természetes módon véges dimenziós algebra ($K[x]$ alkalmas faktoralgebrája) fölötti modulusként is?

d) Írjuk le az összes 2-dimenziós modulust $\mathbb{C}[x]$ fölött izomorfia erejéig!

Megoldás: a) Az M modulus akkor egyszerű, ha M-nek mint vektortérnek nincs valódi A-invariáns altere, mert éppen az A-invariáns alterek lesznek részmodulusok. Legyen az A mátrix minimálpolinomja $m(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1 x + c_0$, ahol a Cayley–Hamilton-tétel miatt $\deg m(x) = k \le n$. Egy tetszőleges $0 \ne v \in M$ elemre az M_K tér $\{ v, vA, vA^2, \dots, vA^{k-1} \}$ által generált altere A-invariáns, mert az első $k-1$ elem A-val vett képe benne van a generátorelemek között, a k.-nak a képe pedig a minimálpolinom felhasználásával $vA^k = -vc_{k-1}A^{k-1} - \dots - vc_1 A - vc_0$ is benne van a generált altérben. Tehát ha nincs valódi invariáns altér, akkor $\deg m(x) = n$, és így a karakterisztikus polinom $(-1)^n m(x)$. Továbbá a minimálpolinomnak irreducibilisnek kell lennie, mert ha $m(x) = f(x)g(x)$ nem triviális felbontás, akkor $\operatorname{Im} f(A)$ invariáns altér, és nem 0, mivel akkor kisebb fokú lenne a minimálpolinom, továbbá az egész tér sem lehet, mert akkor $f(A)g(A) = 0$ miatt $vg(A) = 0$ lenne minden $v \in M$-re, ami megint ellentmond annak, hogy $m(x)$ a minimálpolinom. Azt kaptuk, hogy ha a modulus egyszerű, akkor az A mátrix karakterisztikus polinomja irreducibilis.

Fordítva, ha a karakterisztikus polinom irreducibilis, akkor megegyezik a minimálpolinom $(-1)^n$-szeresével (máskülönben a minimálpolinom valódi osztó lenne), és M_K-nak nem lehet valódi invariáns altere, mert az A erre az altérre való megszorításának a minimálpolinomja az A minimálpolinomjának kisebb fokú (legföljebb az altér dimenziójával megegyező fokú) osztója lenne.

b) Legyen V-n az x hatása az α, W-n a β lineáris transzformáció, és V-nek $\mathcal{B}$, W-nek a $\mathcal{C}$ a kijelölt bázisa, végül $[\alpha]_{\mathcal{B}} = B$ és $[\beta]_{(\mathcal{C})} = C$ mátrixok. Ha a két modulus izomorf, akkor van egy olyan φ vektortér-izomorfizmus, ami felcserélhető az x hatásával, azaz $\alpha\varphi = \varphi\beta$. Legyen P ennek a φ izomorfizmusnak a mátrixa a $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ bázispár szerint. Ekkor

$$[\alpha\varphi]_{(\mathcal{B},\mathcal{C})} = [\alpha]_{\mathcal{B}}[\varphi]_{(\mathcal{B},\mathcal{C})} = BP \text{ és}$$

$$[\varphi\beta]_{(\mathcal{B},\mathcal{C})} = [\varphi]_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}[\beta]_{\mathcal{C}} = PC,$$

amiből $BP = PC$, azaz $C = P^{-1}BP$, így a két mátrix hasonló.
Fordítva, ha a két mátrix hasonló, akkor van olyan P invertálható, amelyre $C = P^{-1}BP$, és ha ezzel a P-vel definiálunk a megadott $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ bázispár szerint egy izomorfizmust V-ből W-be, akkor a fentiek miatt modulusizomorfizmust kapunk.

c) Igen, ha az A mátrix minimálpolinomja $m(x)$, akkor $m(x)$ annullálja az egész modulust, így az modulus lesz a $K[x]/(m(x))$ faktoralgebra fölött is, ami véges dimenziós $(1, x, \ldots, x^{k-1}$ vektortér-generátorrendszerét adja a faktoralgebrának, ahol $k = \deg m(x))$.

d) A 2×2-es komplex mátrixok hasonlósági típusait kell felsorolnunk a b) rész szerint. Ezek pedig a Jordan-normálalakokkal jellemezhetők: a diagonális mátrixokhoz tartozó modulusok két különböző vagy egy sajátértékkel, és a $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ alakú mátrixokhoz tartozó modulusok adják a lehetséges izomorfiatípusokat.

7. *Az alább felsorolt modulusosztályok közül melyikekben bontható minden modulus ciklikusok, illetve egyszerűek direkt összegére? Ha az egész osztályra nem igaz, milyen részosztályra teljesül a felbonthatóság?*

a) vektorterek
b) ferdetest fölötti modulusok
c) $\mathbb{Z}$-modulusok

Megoldás: a) Minden vektortérnek van bázisa, a vektortér pedig a báziselemek által generált ciklikus modulusok direkt összege. Ezek a ciklikus modulusok egyúttal egyszerűek is: $\lambda, \mu \neq 0$-ra $\mu\mathbf{v} = \frac{\mu}{\lambda}(\lambda\mathbf{v})$, tehát bármelyik nem nulla eleme kigenerálja a többit.

b) Könnyen belátható, hogy a ferdetest feletti modulusok ugyanúgy viselkednek, mint a vektorterek, tehát ezek is egyszerűek direkt összegére bomlanak.

c) A $\mathbb{Z}$-modulusok az Abel-csoportok. A véges Abel-csoportok alaptétele szerint minden véges Abel-csoport felbontható ciklikusok direkt összegére. Egyszerűek (p-edrendű ciklikusok) összegére viszont általában nem (pl. a $\mathbb{Z}_4$ sem). A végesen generált Abel-csoportok is felbonthatók ciklikusok direkt összegére, de ez sem teljesül minden Abel-csoportra.

Hf1. *Legyenek A, B és C részmodulusok az M modulusban, és tegyük föl, hogy $A \geq C$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$.*

Hf2. *Legyen* $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ *és* $R = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$. *Bizonyítsuk be, hogy M jobbmodulus R fölött (a természetes mátrixszorzással), és hogy M-nek egyetlen valódi részmodulusa van.*