Homologikus algebra **2. feladatsor** *2017 ősz*

1. *Bizonyítsuk be, hogy a kategóriaelméleti szorzat és koszorzat izomorfizmus erejéig egyértelmű!*

M szorzat:
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi_i"] & M_i \\ \forall U \arrow[u, dashed, "\exists!\varphi"] \arrow[ur, "\alpha_i"'] & \end{tikzcd}$$

N koszorzat:
$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"'] & M_i \arrow[l, "\iota_i"'] \arrow[dl, "\alpha_i"] \\ \forall U & \end{tikzcd}$$

Megoldás: Ha M és M' is szorzata az M_i modulusoknak (π_i és π'_i homomorfizmusokkal), akkor a diagram szerint van $\varphi : M' \to M$ és $\psi : M \to M'$, amelyekre $\varphi\pi_i = \pi'_i$ és $\psi\pi'_i = \pi_i$ minden i-re. De akkor M-et téve U helyébe is a fönti diagramban (és π_i-t α_i helyére), a diagramot $\psi\varphi$-vel és id_M-mel is kommutatívvá lehet tenni. Az egyértelműség miatt ebből $\psi\varphi = id_M$ következik, és ugyanígy jön ki, hogy $\varphi\psi = id_{M'}$, tehát $M \cong M'$. A koszorzatra ugyanez működik, csak fordított irányú homomorfizmusokkal.

2. *Bizonyítsuk be, hogy az U_i modulusok kategóriaelméleti szorzata $\prod U_i$, koszorzata pedig $\oplus U_i$.*

Megoldás: Legyen $M = \prod\limits_{i\in I} M_i$, π_i az i. komponensre való vetítés, U pedig egy tetszőleges modulus, $\alpha_i : U \to M_i$ homomorfizmusokkal. Ekkor a $\varphi : U \to M$, $u\varphi = (\ldots, u\alpha_i, \ldots)$ leképezés modulus-homomorfizmus, és $\varphi\pi_i = \alpha_i$.

Legyen $N = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, ι_i az M_i-nek az N-be való természetes beágyazása, U pedig egy tetszőleges modulus, $\alpha_i : M_i \to U$ homomorfizmusokkal. Ekkor a $\varphi : N \to U$, $\big(\sum\limits_{i\in I} m_i\big)\varphi = \sum\limits_{i\in I} m_i\alpha_i$ értelmes, mert az m_i-k közül csak véges sok nem 0, és nyilvánvalóan művelettartó, továbbá $\iota_i\varphi = \alpha_i$ minden i-re.

3. *Mi a $\mathbb{Z}$ önmagával vett koszorzata, ha az Abel-csoportok, illetve a csoportok kategóriájában nézzük? És $\mathbb{Z}_2$ önmagával vett koszorzata?*

Megoldás: Az Abel-csoportok kategóriájában az 1. feladat szerint $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. A csoportok kategóriájában inkább multiplikatív műveletet szoktunk használni, így $\mathbb{Z}$ helyett vegyük a C_∞ csoportot. Itt a 2 elemmel generált szabadcsoport lesz a koszorzat. Legyen ugyanis az F csoport az x, y elemekkel szabadon generált csoport. $M_1 =< x >$, és $M_2 =< y >$ mindketten végtelen ciklikus csoportok, és a természetes beágyazásuk F-be a ι_1 és ι_2. Tetszőleges U csoportra és $\alpha_i : M_i \to U$ homomorfizmusokra van olyan egyértelmű $\varphi : F \to U$ homomorfizmus, ami a szabad generátorokon megadott $x \mapsto x\alpha_1$ és $y \mapsto y\alpha_2$ leképezést kiterjeszti. Mivel $\iota_i\varphi = \alpha_i$ teljesül az M_i generátor elemén x-en, illetve y-on, a teljes M_i csoporton is teljesül $i = 1, 2$-re. Vagyis F valóban a végtelen ciklikus csoport koszorzata önmagával.

$\mathbb{Z}_2$ koszorzata önmagával az Abel-csoportok kategóriájában nyilván $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, azaz a Klein-csoport, a csoportok kategóriájában pedig két másodrendű ciklikus csoport szabad szorzata, azaz az $\langle\, x, y \,|\, x^2 = y^2 = 1 \,\rangle$ definiáló relációkkal megadott csoport (mellesleg ez ugyanaz, amit a síkon egy 2π-nek irracionális többszörösével való origó körüli forgatás, és egy origón átmenő egyenesre való tükrözés generál a sík egybevágóságcsoportjában).

4. *Bizonyítsuk be, hogy projektív modulusok direkt összege projektív, és injektív modulusok direkt szorzata injektív!*

Megoldás: Legyenek M_i-k projektívek, $\alpha : X \to Y$ szürjektív, és $\beta : \oplus M_i \to Y$. Ekkor M_i projektivitásából következik, hogy van olyan $\psi_i : M_i \to X$, amelyre $\psi_i\alpha = \iota_i\beta$ minden i-re. Ekkor viszont a koszorzat definíciója miatt van olyan $\varepsilon : \oplus M_i \to X$, amelyre $\psi_i = \iota_i\varepsilon$ minden i-re. Következésképpen $\iota_i\beta = \psi_i\alpha = \iota_i\varepsilon\alpha$, tehát $\beta = \varepsilon\alpha$ a $\oplus M_i$ minden komponensén, és így $\oplus M_i$-n is.

$$\begin{tikzcd}
 & M_i \arrow[d, "\iota_i"] \arrow[ddl, dashed, "\psi_i"'] \\
 & \oplus M_i \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, dashed, "\varepsilon"] \\
X \arrow[r, two heads, "\alpha"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \arrow[dl, dashed, "\varepsilon"'] \arrow[ddl, dashed, "\psi_i"] \\
\prod M_i \arrow[d, "\pi_i"'] & \\
M_i &
\end{tikzcd}$$

Most legyenek M_i-k injektív modulusok, $\alpha : X \to Y$ injektív homomorfizmus, és $\beta : X \to \prod M_i$. Ekkor az M_i injektivitása miatt van olyan $\psi_i : Y \to M_i$ homomorfizmus minden i-re, amelyre $\alpha\psi_i = \beta\pi_i$. Most a kategóriaelméleti szorzat definíciójából következik, hogy van olyan $\varepsilon : Y \to \prod M_i$, amelyre $\varepsilon\pi_i = \psi_i$ minden i-re. Következésképpen $\alpha\varepsilon\pi_i = \alpha\psi_i = \beta\pi_i$ minden i-re. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $x \in X$-re $x\alpha\varepsilon$ és $x\beta$ minden komponense megegyezik, azaz $\alpha\varepsilon = \beta$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy minden vektortér projektív és injektív!*

Megoldás: A vektorterekre teljesül, hogy minden altérnek van direkt kiegészítője (a vektorterek féligegyszerűek). A P projektív modulusoknak abból a jellemzéséből, hogy minden $M \to P$ szürjektív homomorfizmus magja direkt összeadandó, következik, hogy minden vektortér projektív, és a Q injektív modulusoknak abból a jellemzéséből, hogy minden $Q \to M$ injektív homomorfizmus képe direkt összeadandó, következik, hogy minden vektortér injektív. Sőt általánosabban beláttuk, hogy féligegyszerű gyűrű fölött minden modulus projektív és injektív.

6. *Legyen $a \in R$, és tegyük fel, hogy az aR jobb R-modulus projektív. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az a elem jobb annullátora is felírható bR alakban valamely $b \in R$-re!*

Megoldás: A $\varphi : r \mapsto ar$ leképezés homomorfizmus R_R-ből aR-re. A φ magja, $\operatorname{Ker}\varphi = \{\, r \in R \mid ar = 0 \,\}$, vagyis az a elem jobb annullátora. A φ homomorfizmus szürjektív, és aR-ről feltettük, hogy projektív, ezért $\operatorname{Ker}\varphi$ direkt összeadandója R_R-nek: $R_R = \operatorname{Ker}\varphi \oplus V$ valamely V részmodulusra. Az első komponensre való vetítés modulus-homomorfizmus, ami az R_R generátorelemét, 1-et a kép generátorelemébe képezi, tehát $\operatorname{Ker}\varphi$ is ciklikus modulus, azaz bR alakú.

7. *Bizonyítsuk be, hogy*

a) $\mathbb{Q}$ *nem projektív;*

b)* $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ *nem projektív! (Útmutatás: Álljon a H részcsoport azokból az elemekből, amelyekre igaz, hogy tetszőleges n-re a komponensek véges sok kivétellel oszthatók 2^n-nel.*

Ekkor H kontinuum számosságú, de $H/2H$ megszámlálható, így H nem lehet szabad Abel-csoport.)

Megoldás: a) Szabad Abel-csoportnak, azaz $\mathbb{Z}$-k direkt összegének semelyik nem nulla eleme nem korlátlanul osztható, mert $\mathbb{Z}$-ben $0 \neq n$ nem osztható $2n$-nel. Így projektív Abel-csoportban sincs korlátlanul osztható nem 0 elem, $\mathbb{Q}$ viszont osztható csoport.

b) A bizonyításban felhasználjuk azt a tételt, hogy szabad Abel-csoport minden részcsoportja szabad, így ha a $G = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ csoport projektív, akkor ő és minden részcsoportja, tehát a H részcsoport is szabad, azaz $\mathbb{Z}$-k direkt összege. H nyilván tartalmazza a $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ részcsoportot, továbbá minden olyan elemet is, amelynek az n. komponense vagy 0, vagy 2^n minden n-re. Ez utóbbiból kontinuum sok van, így H csak kontinuum sok $\mathbb{Z}$ direkt összege lehet (Ha α végtelen számosság, akkor α darab $\mathbb{Z}$ direkt összege is α számosságú). Viszont akkor $H/2H$ kontinuum dimenziós $\mathbb{F}_2$ fölötti vektortér volna. De $2H + \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z} = H$ (egy H-beli h elemből kivonhatjuk azt a direkt összegbelit, amelyben h — véges sok — páratlan komponense szerepel, és a többi helyen 0, és így egy $2H$-belit kapunk), tehát $|H/2H| \leq \left|\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}\right|$, és az utóbbi megszámlálható. Ellentmondásra jutottunk a feltevésből, hogy G projektív.

Hf1. *Legyen M jobb R-modulus. Bizonyítsuk be, hogy M annullátora R-ben, azaz $\mathrm{Ann}_R(M) = \{\, r \in R \mid mr = 0\ \forall\ m \in M \,\}$ kétoldali ideálja R-nek.*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy egy P modulus akkor és csak akkor projektív, ha van olyan szabad F modulus, melyre $F \cong F \oplus P$. (Útmutatás: gondoljunk a végtelen direkt összegekre is!)*