1. *Legyenek ${}_SX_R$ és ${}_TY_R$ bimodulusok. Lássuk be, hogy* $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ *egy T-S-bimodulus, azaz bal T-modulus, jobb S-modulus, és a bal és jobb oldali gyűrűhatás felcserélhető!*

Megoldás: Legyenek $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_R(X,Y)$. Definiáljuk az S-szorzást az $x(\varphi s) := (sx)\varphi$, a T-szorzást pedig az $y(t\varphi) := t(y\varphi)$ szabállyal. A φs és $t\varphi$ leképezések is R-homomorfizmusok:

$$(x+x')(\varphi s) = (s(x+x'))\varphi = (sx+sx')\varphi = (sx)\varphi + (sx')\varphi = x(\varphi s) + x'(\varphi s),$$

$$(xr)(\varphi s) = (s(xr))\varphi = ((sx)r)\varphi = ((sx)\varphi)r = (x(\varphi s))r,$$

$$(x+x')(t\varphi) = t((x+x')\varphi) = t(x\varphi + x'\varphi) = t(x\varphi) + t(x'\varphi) = x(t\varphi) + x'(t\varphi),$$

$$(xr)(t\varphi) = t((xr)\varphi) = t((x\varphi)r) = (t(x\varphi))r = (x(t\varphi))r.$$

Belátjuk még, hogy ezzel a definícióval $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ T-S-bimodulus. Az összeadással kapcsolatos axiómák teljesülése nyilvánvaló, mert a definícióban minden felcserélhető az összeadással, itt már csak a szorzásról szólókat ellenőrizzük.

$$x(\varphi(ss')) = ((ss')x)\varphi = (s(s'x))\varphi = (s'x)(\varphi s) = x((\varphi s)s'),$$

$$x((tt')\varphi) = (tt')(x\varphi) = t(t'(x\varphi)) = t(x(t'\varphi)) = x(t(t'\varphi)),$$

$$x(t(\varphi s)) = t(x(\varphi s)) = t((sx)\varphi) = (sx)(t\varphi) = x((t\varphi)s)).$$

2. *Bizonyítsuk be, hogy* $\mathrm{End}(R_R) \cong R$*, ha az endomorfizmusokat balról írjuk!*

Megoldás: Definiáljuk minden $r \in R$-re a $\varphi_r \in \mathrm{End}(R_R)$ endomorfizmust az r-rel való balszorzásként. Ez valóban jobbmodulus-homomorfizmus:

$$\varphi_r(x+y) = r(x+y) = rx + ry = \varphi_r x + \varphi_r y,$$

$$\varphi_r(xs) = r(xs) = (rx)s = (\varphi_r x)\cdot s.$$

Továbbá az $\varepsilon : R \to \mathrm{End}(R_R)$, $r \mapsto \varphi_r$ leképezés gyűrűhomomorfizmus, ugyanis

$$\varphi_{r+s}x = (r+s)x = rx + sx = \varphi_r x + \varphi_s x \text{ miatt } \varphi_{r+s} = \varphi_r + \varphi_s, \text{ és}$$

$$\varphi_{rs}x = (rs)x = r(sx) = \varphi_r(sx) = \varphi_r(\varphi_s x) \text{ miatt } \varphi_{rs} = \varphi_r\varphi_s.$$

ε injektív, mert $\varphi_r = \varphi_s$ esetén $r = \varphi_r 1 = \varphi_s 1 = s$, és szürjektív, mert ha $\varphi \in \mathrm{End}(R_R)$, és $\varphi 1 = r$, akkor $\varphi x = \varphi(1\cdot x) = (\varphi 1)\cdot x = rx = \varphi_r x$ minden x-re, így $\varphi = \varphi_r$. Tehát ε gyűrűizomorfizmus.

3. *Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}_n$ injektív mint önmaga fölötti modulus (használhatjuk a Baer-kritériumot)!*

Megoldás: $\mathbb{Z}_n$ részmodulusai az n osztói által generált ciklikus modulusok, azaz $k\mathbb{Z}_n$, ahol $k \mid n$ (ugyanis ha k az I ideál legkisebb pozitív eleme, akkor az $n = kq + r$ maradékos osztásból következik, hogy $r \in I$, tehát $0 \leq r < k$ miatt $r = 0$, azaz $k|n$, és tetszőleges $a \in I$ elemre az $a = kq_1 + r_1$ maradékos osztásból $r_1 = 0$ következik, így k generálja I-t). Tehát a Baer-kritérium miatt elég a következő típusú diagramokkal foglalkozni.

$$\begin{tikzcd} k\mathbb{Z}_n \arrow[r, tail, "\iota"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathbb{Z}_n \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"] \\ \mathbb{Z}_n & \end{tikzcd}$$

ahol ι a természetes beágyazás: $k\iota = k$. Legyen $k\alpha = a \in \mathbb{Z}_n$. Ekkor $a\frac{n}{k} = k\alpha\frac{n}{k} = (k\frac{n}{k})\alpha = 0\alpha = 0$, ezért $k \mid a$, és így van olyan $b \in \mathbb{Z}_n$, amelyre $a = kb$. Mivel $\mathbb{Z}_n$ szabad modulus önmaga fölött, létezik olyan γ homomorfizmus, amelyre $1\gamma = b$, és így $k\iota\gamma = k\gamma = (1k)\gamma = (1\gamma)k = bk = a = k\alpha$. Tehát $\iota\gamma = \alpha$ a generátorelemen, és így az egész $k\mathbb{Z}_n$-en is.

4. *Legyen R nem feltétlenül egységelemes gyűrű, és tegyük fel, hogy az $I \triangleleft R$ ideál mint gyűrű egységelemes. Bizonyítsuk be, hogy ekkor I az R-nek mint gyűrűnek direkt összeadandója!*

Megoldás: Legyen e az I egységeleme. Ekkor $I = eI = eR$. Tekintsük a $\varphi : R_R \to eR$, $r \mapsto er$ leképezést. Ez modulushomomorfizmus: $(r+s)\varphi = e(r+s) = er + es = r\varphi + s\varphi$ és $(rs)\varphi = e(rs) = (er)s = (r\varphi)s$, és nyilván szürjektív. Legyen $U = \operatorname{Ker}\varphi$. Ekkor $U \cap I = 0$, mert $0 \neq a \in I$-re $a\varphi = ea = a \neq 0$, és $U + I = R$, ugyanis $r \in R$-re $(r - er)\varphi = er - e^2r = er - er = 0 \Rightarrow r - er \in \operatorname{Ker}\varphi = U \Rightarrow r \in U + I$. Tehát $R = I \oplus \operatorname{Ker}\varphi$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{F}_2C_4$ csoportalgebra reguláris modulusa felbonthatatlan.*

Megoldás: $\mathbb{F}_2C_4$-ben nincs más idempotens elem, mint 0 és 1. Ha ugyanis $C = \{1, a, a^2, a^3\}$, és $r = x + ya + za^2 + ua^3 \in \mathbb{F}_2C_4$ idempotens ($x, y, z, u \in \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$),akkor $r^2 = x^2 + y^2a^2 + z^2 + u^2a^2 = (x+z) + (y+u)a^2$ (a vegyes szorzatok együtthatója 2, ezért ezek kiesnek), tehát $r = r^2$-ből $x + z = x$, $y + u = z$, $y = u = 0$ következik, vagyis $r = x = 0$ vagy 1.

6. *Bizonyítsuk be, hogy az $A = \mathbb{F}_2D_3$ csoportalgebra reguláris modulusában az $(1 + f + f^2)A$ részmodulus direkt összeadandó (ahol D_3 a harmadfokú diédercsoport, és f ebben a $120°$-os forgatás). Hány dimenziós ez a részmodulus?*

Megoldás: Ha egy R gyűrűben e idempotens, akkor $R = eR \oplus (1-e)R$, ugyanis $1 - e$ is idempotens: $(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - 2e + e = 1 - e$, és ortogonális e-re: $(1-e)e = e - e^2 = e - e = 0$ és $e(1-e) = e - e^2 = e - e = 0$. Tehát elég belátni, hogy $e = 1 + f + f^2$ idempotens. Valóban, $e^2 = (1 + f + f^2)^2 = 1 + f^2 + f^4 = 1 + f^2 + f = e$.

$eR = (1 + f + f^2)R$-ben $(1 + f + f^2)f^k = 1 + f + f^2$, és $(1 + f + f^2)f^kt = t + ft + f^2t$, ahol t az egyik tükrözés, így $eR = \langle 1 + f + f^2,\ t + ft + f^2t \rangle_{\mathbb{F}_2}$ 2-dimenziós.

7. *Legyen $A = K^{n \times n}$ a teljes mátrixalgebra.*

a) *Bizonyítsuk be, hogy $E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}$ páronként ortogonális idempotensek teljes rendszere!*

b) Bizonyítsuk be, hogy az $A_A = \oplus_{i=1}^n E_{ii}A$ felbontás tagjai egyszerű, egymással izomorf modulusok!

Megoldás: a) $E_{ii}^2 = E_{ii}$, $E_{ii}E_{jj} = 0$ if $i \neq j$, és $\sum_{i=1}^n E_{ii} = I$ az A egységeleme, tehát $A_A = \oplus_{i=1}^n E_{ii}A$.

b) $E_{ii}A$ azokból a mátrixokból áll, amelynek az i. során kívül minden eleme 0. Tegyük fel, hogy egy $M \neq 0$ mátrix eleme az $U \leq E_{ii}A$ részmodulusnak. A mátrix i. sorának valamelyik eleme nem nulla, mondjuk, $m_{ij} \neq 0$. Ekkor $M(E_{jk}m_{ij}^{-1}) = E_{ik}$, tehát minden E_{ik} benne van U-ban, és akkor a teljes $E_{ii}A$ is. Ezzel beláttuk, hogy a komponensek egyszerűek. Az E_{ji}-vel való balszorzás modulushomomorfizmus $E_{ii}A$-ból $E_{jj}A$-ba, míg az E_{ij}-vel való balszorzás modulushomomorfizmus E_{jj}-ből E_{ii}-be, és a két homomorfizmus kompozíciója $E_{ii}X \mapsto E_{ij}E_{ji}E_{ii}X = E_{ii}X$, illetve $E_{jj}X \mapsto E_{ji}E_{ij}E_{jj}X = E_{jj}X$ az identikus leképezés, $E_{ii}A$ és $E_{jj}A$ izomorfak.

Hf1. *Injektív-e $\mathbb{Z}_2$ mint $\mathbb{Z}_4$-modulus, illetve $\mathbb{Z}_6$-modulus?*

Hf2. *Legyen $A \leq K^{n\times n}$ a felső háromszögmátrixok algebrája. Bizonyítsuk be, hogy az $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ idempotensek felhasználásával A_A direkt felbonthatatlan modulusok direkt összegére bomlik, de ezek a modulusok nem mind egyszerűek. Hány dimenziósak a direkt összeadandók?*