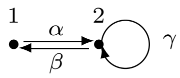
1. *Bizonyítsuk be, hogy ha Γ véges gráf n csúccsal, és e_i az i. csúcsból kiinduló 0 hosszúságú út, akkor a $K\Gamma$ gráfalgebrában az $e_iK\Gamma$ részmodulusok direkt felbonthatatlanok (tehát e_i nem bontható fel $e_iK\Gamma$-beli ortogonális idempotensek összegére), de $e_iK\Gamma$-ban előfordulhat a 0-n és e_i-n kívül más idempotens is.*

Megoldás: Ha $e_iK\Gamma$ felbontható, akkor e_i két $e_iK\Gamma$-beli ortogonális idempotens összegére bomlik, azaz $e_i = f_1 + f_2$, ahol $f_1 = \lambda e_i + u$, $f_2 = (1-\lambda)e_i - u$, $\lambda \in K$, u pedig i-ből induló legalább 1 hosszúságú utak lineáris kombinációja. Ekkor $f_1 f_2 = 0$-ból $\lambda(1-\lambda)e_i + ((1-\lambda_i)ue_i - \lambda u) = 0$ következik. Minthogy a második összeadandó csak 0-nál hosszabb utakból áll, $\lambda(1-\lambda) = 0$, azaz $\lambda = 0$ vagy 1, feltehető, hogy $\lambda = 0$. De ekkor $f_1 = u$ nem lehet idempotens, mert ha a benne nem nulla együtthatóval szereplő utak minimális hossza k, akkor u^2-ben csak legalább $2k$ hosszú utak szerepelnek.

Más idempotens azért létezhet. Legyen például Γ egy kétcsúcsú gráf egyetlen α éllel 1-ből 2-be. Ekkor $e_1 + \alpha \in e_1K\Gamma$ is idempotens, de a kiegészítője, $-\alpha$ nem idempotens (és nem is ortogonálisak).

2. *Adjuk meg az A algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha $A = K\Gamma/I$, ahol* Γ:  *és*

a) $I = (\alpha\gamma, \gamma^2, \gamma\beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta)$;

b) $I = (\alpha\gamma^2, \gamma^2 - \beta\alpha, \alpha\beta)$.

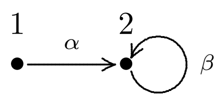
Megoldás: a) $A_A = \begin{array}{c}1\\2\\1\end{array} \oplus \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & & 2 \\ & 2 & \end{array}$

b) $A_A = \begin{array}{c}1\\2\\2\\1\end{array} \oplus \begin{array}{cccc} & 2 & & \\ 1 & & 2 & \\ & 2 & & 1 \\ & & 2 & \end{array}.$

3. *Lehet-e az alábbi egy $K\Gamma/I$ algebra reguláris jobbmodulusának Loewy-diagramja? Ha igen, adjuk meg a Γ gráfot és az I ideálnak egy generátorrendszerét!*

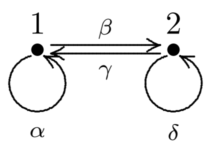
a) $\begin{array}{c}1\\2\\2\\2\end{array} \oplus \begin{array}{c}2\\2\end{array}$ *b)* $\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 2 \\ & 2 & \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{array}$ *c)* $\begin{array}{c}1\\2\end{array} \oplus \begin{array}{c}2\\3\end{array} \oplus 3$

Megoldás: a) Nincs ilyen algebra. Ugyanis ennek az algebrának a gráfja csak



lehetne, de a második komponensből leolvasható, hogy $\beta^2 = 0$, míg az első komponensből azt látjuk, hogy $\alpha\beta^2 \neq 0$, ami ellentmondás.

b) Az algebra gráfja



és $I = (\alpha^2, \beta\gamma, \alpha\beta - \beta\delta, \gamma\alpha, \gamma\beta, \delta^2, \delta\gamma)$.

c) Az algebra gráfja $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$, és $I = (\alpha\beta)$.

4. *Legyen $A = K\Gamma/I$ az az algebra, amelynek reguláris jobbmodulusa $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$. Határozzuk meg az $\begin{smallmatrix}&&1\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$ modulus összes részmodulusát és az ezekkel vett faktorainak Loewy-diagramját!*

Megoldás: Az algebra gráfja Γ :

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, "\alpha"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

és $A = K\Gamma/(\alpha\beta^2, \beta^3)$. Nevezzük el az $M = \begin{smallmatrix}&&1\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$ modulus báziselemeit b_1, c_1, b_2, c_2-nek, ahol $Me_1 = \langle b_1, c_1\rangle$, $Me_2 = \langle b_2, c_2\rangle$ úgy, hogy a modulus

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & c_1 \arrow[d, dash, "\alpha"] \\ b_1 \arrow[dr, dash, "\alpha"'] & & c_2 \arrow[dl, dash, "\beta"] \\ & b_2 & \end{tikzcd}$$

Legyen $U \leq M$. Először tegyük fel, hogy $Ue_1 \neq 0$. Ha U-ban van $u = \lambda b_1 + \mu c_1$ alakú elem, ahol $\mu \neq 0$, akkor $u\alpha = \lambda b_2 + \mu c_2$, és $u\alpha\beta = \mu b_2$ miatt $b_2, c_2 \in U$, tehát vagy $U = M$, vagy U háromdimenziós, és bázisa $\{\, \lambda b_1 + \mu c_1, c_2, b_2 \,\}$. Legyen ez U_μ. Ezeknek a modulusoknak a Loewy-diagramja $\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}$ (a Loewy-diagramhoz tartozó bázis a $\{\, \lambda b_1 + \mu c_1, \lambda b_2 + \mu c_2, b_2 \,\}$). Ha $Ue_1 \neq 0$, de csak λb_1 alakú elemeket tartalmaz, akkor $b_1 \in U$, és ebből $b_2 \in U$ is következik. Így Ue_2 vagy Me_2-vel egyezik meg, vagy egydimenziós, tehát a részmodulus vagy $\langle b_1, b_2, c_2\rangle = \begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$, vagy $\langle b_1, b_2\rangle = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$. Ha $Ue_1 = 0$, és $U = Ue_2$-nek van $u = \lambda b_2 + \mu c_2$ alakú eleme $\mu \neq 0$-val, akkor $u\beta = \mu b_2 \in U$, így $b_2, c_2 \in U$, és $U = \langle c_2, b_2\rangle = \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$. Ha ilyen elem sincs Ue_2-ben, de $U \neq 0$, akkor $U = \langle b_2\rangle$, és a Loewy-diagramja 2. Így a végtelen sok (de egymással izomorf) U_μ részmoduluson kívül, de a 0-t is beleszámítva 6 részmodulus van. A faktormodulusok Loewy-diagramjukkal felírva: 0, 1, $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$, $1 \oplus 1$, $1 \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$, és maga M.

5. *Hány dimenziós az 3.b) feladatban megadott A algebra fölött a* $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix})$, *illetve a* $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\end{smallmatrix})$ *vektortér?*

Megoldás: Legyen $M = \begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\end{smallmatrix}$ és $N = \begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$. Az M Loewy-diagramjának tetején levő számnak megfelelő generátorelemet csak a kétdimenziós Ne_2 altérbe képezhetjük, és van két ilyen független homomorfizmus: M-et $S(1)$-gyel lefaktorizálva, a $\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$ modulust beágyazhatjuk N-be, illetve az $M/(1 \oplus 2) \cong 2$ faktormodulust beágyazhatjuk N-be úgy, hogy a kép az N Loewy-diagramjának alján levő számnak megfelelő egydimenziós részmodulus (ez az N talpa, azaz az egyszerű részmodulusok generátuma). Így $\dim_K \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}) = 2$.

N-nek nyilván nincs monomorfizmusa M-be (a dimenziók miatt ennek izomorfizmusnak kellene lennie), és könnyen látható, hogy N minden nem nulla részmodulusa tartalmazza az N talpát, $S(2)$-t, tehát a homomorfizmusok valójában $S(1) \oplus S(2)$-ből mennek. Ez viszont csak az M, szintén $S(1) \oplus S(2)$-vel izomorf talpába képződhet. A $\mathrm{Hom}(1 \oplus 2, 1 \oplus 2)$ vektorteret generálják a $\pi_1\iota_1$ és $\pi_2\iota_2$ morfizmusok, tehát 2-dimenziós.

6. $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus 3$ *reguláris modulusú algebra fölötti* $X = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$ *és* $Y = \begin{smallmatrix} 2 \end{smallmatrix}$ *modulus projektív feloldását, illetve a 4. feladatban szereplő modulus projektív feloldását!*

Megoldás:

$$0 \to \begin{smallmatrix} 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \to 0$$

$$0 \to \begin{smallmatrix} 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 2 \end{smallmatrix} \to 0$$

$$\cdots \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & & 1 \\ 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \to 0$$

Az utóbbi sorozatban a morfizmusok magjai felváltva $\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$ és $\begin{smallmatrix} 2 \end{smallmatrix}$.

Hf1. *Írjuk fel az* $A = K\Gamma/I$ *algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha*

$$\Gamma : 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\delta}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} 3, \qquad I = (\alpha\beta, \beta\alpha - \gamma\delta, \delta\beta, \delta\gamma).$$

Hf2. *Legyen* A *az a gráfalgebra, amelynek reguláris modulusa* $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$. *Adjuk meg a három egyszerű modulus projektív feloldását!*