

1. Bizonyítsuk be, hogy

- ha α és β epimorfizmus, akkor $\alpha\beta$ is az;
- ha α és β monomorfizmus, akkor $\alpha\beta$ is az;
- ha $\alpha\beta$ epimorfizmus, akkor β is az;
- ha $\alpha\beta$ monomorfizmus, akkor α is az!

Megoldás: a) $(\alpha\beta)\gamma = (\alpha\beta)\delta \Rightarrow \alpha(\beta\gamma) = \alpha(\beta\delta)$, és α epi. $\Rightarrow \beta\gamma = \beta\delta$, és β epi. $\Rightarrow \gamma = \delta$.

b) $\gamma(\alpha\beta) = \delta(\alpha\beta) \Rightarrow (\gamma\alpha)\beta = (\delta\alpha)\beta$, és β mono. $\Rightarrow \gamma\alpha = \delta\alpha$, és α mono. $\Rightarrow \gamma = \delta$.

c) $\beta\gamma = \beta\delta \Rightarrow \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\delta$, és $\alpha\beta$ epi. $\Rightarrow \gamma = \delta$.

d) $\gamma\alpha = \delta\alpha \Rightarrow \gamma\alpha\beta = \delta\alpha\beta$, és $\alpha\beta$ mono. $\Rightarrow \gamma = \delta$.

2. Bizonyítsuk be, hogy $\text{Mod-}R$ -ben az epimorfizmusok éppen a szürjektív homomorfizmusok, a monomorfizmusok pedig az injektív homomorfizmusok.

Megoldás: Tegyük fel, hogy $X \xrightarrow{\alpha} Y$ szürjektív, és $\alpha\gamma = \alpha\delta$. Ekkor $\forall x \in X$ -re $x\alpha\gamma = x\alpha\delta$, s mivel α szürjektív, minden $y \in Y$ -hoz van $x \in X$, hogy $y = x\alpha$, így $y\gamma = y\delta$ minden $y \in Y$ -ra, azaz $\gamma = \delta$. Tehát α epimorfizmus.

Most tegyük fel, hogy $X \xrightarrow{\alpha} Y$ nem szürjektív, így $Y_1 := \text{Im } \alpha < Y$. Legyen $\gamma : Y \rightarrow Y/Y_1$ a természetes faktorizáló leképezés, és $\delta : Y \rightarrow Y/Y_1$ a 0-leképezés. Ekkor $\alpha\gamma = \alpha\delta = 0$, viszont $\text{Im } \gamma = Y/Y_1 \neq 0 = \text{Im } \delta$, ezért $\gamma \neq \delta$. Tehát α nem epimorfizmus.

Tegyük fel, hogy $X \xrightarrow{\alpha} Y$ injektív, és $\gamma\alpha = \delta\alpha$ valamely $\gamma, \delta : U \rightarrow X$ -re. Ekkor minden $u \in U$ -ra $u\gamma\alpha = u\delta\alpha$, és α injektivitása miatt ebből $u\gamma = u\delta$ következik. Ezért $\gamma = \delta$, vagyis α monomorfizmus.

Most tegyük fel, hogy $X \xrightarrow{\alpha} Y$ nem injektív. Legyen $X_1 = \text{Ker } \alpha \neq 0$. Ha $\gamma : X_1 \rightarrow X$ a természetes beágyazás, és $\delta : X_1 \rightarrow X$ a 0-leképezés, akkor $\gamma\alpha = \delta\alpha$, de $\text{Ker } \gamma = 0 < X_1 = \text{Ker } \delta$, ezért $\gamma \neq \delta$, vagyis α nem monomorfizmus.

3. Legyen \mathcal{K} az a kategória, amelynek egyetlen a objektuma van, és $S = \text{Hom}(a, a)$ egy véges, egységelemes félcsoport, amelyben $1 := \text{id}_a$. Melyek lesznek $\text{Hom}(a, a)$ -ban az epimorfizmusok és a monomorfizmusok?

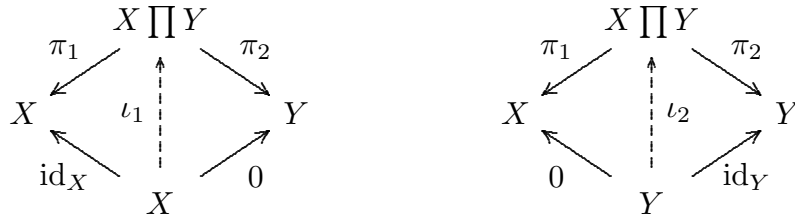
Megoldás: Egy $b \in S$ elem akkor és csak akkor epimorfizmus, ha balról egyszerűsíteni lehet vele, azaz ha $bx = by \Rightarrow x = y$. Ez viszont azt jelenti, hogy a b -vel való balról szorzás injektív leképezés S -ből S -be. Mivel feltettük, hogy S véges, ebből a leképezés szürjektivitása is következik, ezért a leképezés permutációként hat S -en, következésképpen valamilyen $n > 0$ -ra $b^n = 1$, és így b invertálható. Ugyanígy kijön, hogy ha b monomorfizmus, akkor b invertálható (csak ott a jobbról szorzás injektivitását használjuk). Fordítva, minden invertálható elemmel egyszerűsíteni lehet (bármelyik oldalról): $bx = by \Rightarrow x = b^{-1}bx = b^{-1}by = y$, és ugyanígy a jobb oldalon, így ezek epimorfizmusok és monomorfizmusok is. Összefoglalva: $b \in S$ -re ekvivalens, hogy

- b epimorfizmus;
- b monomorfizmus;
- b invertálható;
- $\exists n > 0$ $b^n = 1$.

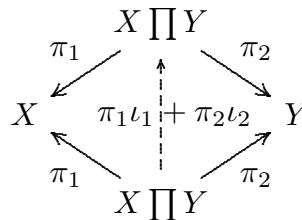
4. Bizonyítsuk be, hogy egy additív kategóriában véges sok objektum szorzata és koszorzata megegyezik!

Megoldás: Két objektum szorzatára bizonyítjuk az állítást, véges sok objektum szorzatára hasonlóan megy. Feltesszük, hogy létezik a szorzat (ez mindenképpen teljesül, ha a kategória additív, és nemcsak preadditív), és belátjuk, hogy ez az objektum egyúttal koszorzat is.

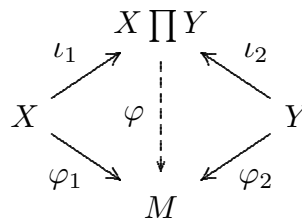
Jelöljük X és Y szorzatát $X \amalg Y$ -nal, és tartozzanak hozzá a $X \xleftarrow{\pi_1} X \amalg Y \xrightarrow{\pi_2} Y$ morfizmusok. A szorzat univerzális tulajdonságából következik az alábbi $\iota_1 : X \rightarrow X \amalg Y$ és $\iota_2 : Y \rightarrow X \amalg Y$ morfizmusok létezése, amelyek a diagramokat kommutatívvá teszik.



Vegyük észre, hogy ekkor $\iota_i \pi_j = 0$, ha $i \neq j$, és $\iota_i \pi_i$ az X , illetve Y identikus morfizmusa. Belátjuk, hogy $\pi_1 \iota_1 + \pi_2 \iota_2$ a szorzat identikus morfizmusa. Valóban, ez következik az alábbi diagram középső morfizmusának egyértelműségéből.



Tegyük fel most, hogy adva van két morfizmus $X \xrightarrow{\varphi_1} M \xleftarrow{\varphi_2} Y$. Ekkor létezik az alábbi diagramot kommutatívvá tevő φ :



$\varphi = \pi_1 \varphi_1 + \pi_2 \varphi_2$ megfelel, ugyanis $\iota_1 \varphi = \iota_1 \pi_1 \varphi_1 + \iota_1 \pi_2 \varphi_2 = \text{id}_X \varphi_1 + 0 \varphi_2 = \varphi_1$, és hasonlóan $\iota_2 \varphi = \varphi_2$. Még a φ egyértelműségét kell belátnunk. Ha egy $\psi : X \amalg Y \rightarrow M$ is megfelel középső morfizmusnak, akkor $\iota_1 \psi = \varphi_1$ és $\iota_2 \psi = \varphi_2$, tehát $\psi = \text{id}_{X \amalg Y} \psi = (\pi_1 \iota_1 + \pi_2 \iota_2) \psi = \pi_1 \iota_1 \psi + \pi_2 \iota_2 \psi = \pi_1 \varphi_1 + \pi_2 \varphi_2 = \varphi$. Így $X \amalg Y$ valóban az X és az Y koszorzata.

5. A következők közül melyik definiál funktort a morfizmusokon való természetes hatással együtt?
- $G \mapsto G'$ a csoportok kategóriájában;
 - $G \mapsto Z(G)$ a csoportok kategóriájában;
 - $A \mapsto t(A)$ az Abel-csoportok kategóriájában, ahol $t(A)$ az A torziórészcsoportja, azaz véges rendű elemeinek csoportja.

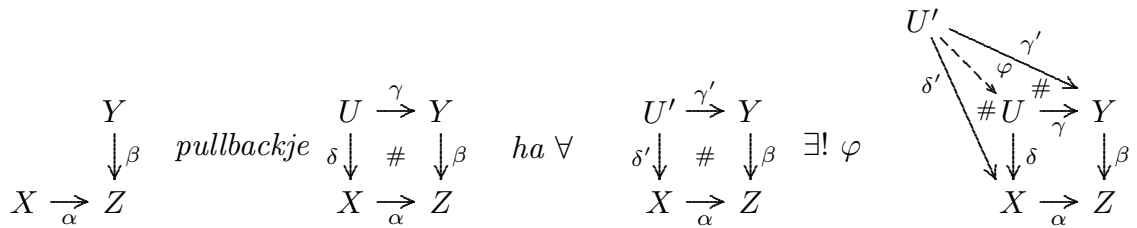
Megoldás: a) Ha $\varphi : G \rightarrow H$ csoport-homomorfizmus, akkor

$$G'\varphi = \langle x^{-1}y^{-1}xy \mid x, y \in G \rangle \varphi = \langle (x\varphi)^{-1}(y\varphi)^{-1}(x\varphi)(y\varphi) \mid x, y \in G \rangle \leq H',$$

tehát a morfizmusokon definiálhatjuk a funktort úgy hogy φ képe $\varphi|_{G'}$, azaz a kommutátor-részcsoportha való megszorítás legyen. Így nyilván kovariáns funktort kapunk.

- b) Az előző módszer itt nem működik, mivel a csoporthomomorfizmus a centrumot nem feltétlenül képezi a centrumba. És valóban nem lehet sem kovariáns sem kontravariáns funktort definiálni a morfizmusokon. Tekintsük például a $C_2 = \{1, a\}$ ciklikus csoportot és a $D_3 = \langle f, t \rangle$ diéder csoportot, ahol f az egyik forgatás és t az egyik tükrözés. Legyen továbbá $C_2 \xrightarrow{\alpha} D_3 \xrightarrow{\beta} C_2$, ahol $\alpha : a \mapsto t, \beta : f \mapsto 1, t \mapsto a$. Ekkor $\alpha\beta = \text{id}_{C_2}$, tehát $F(\alpha\beta) = \text{id}_{Z(C_2)} = \text{id}_{C_2}$. Viszont $Z(D_3) = 1$, tehát α és β képe is csak a triviális homomorfizmus lehet, és így a képek szorzata (akár invariáns akár kovariáns lenne a funktor) csak az azonosan 1 homomorfizmus lehetne.
- c) Az a) részhez hasonlóan itt is kovariáns funktort tudunk definiálni, mert a torziórészcsoporthot minden homomorfizmus torziórészcsoporthba képezi.

Egy kategóriában



6. Bizonyítsuk be, hogy $\text{Mod-}R$ -ben mindig létezik pullback ($U = \{(x, y) \mid x\alpha = y\beta\}$). Fogalmazzuk meg a pullback duálisát, a pushoutot, és bizonyítsuk be, hogy $\text{Mod-}R$ -ben mindig létezik pushout ($U = X \oplus Y / \{(z\alpha, -z\beta) \mid z \in Z\}$).

Megoldás: Az $X \xrightarrow{\alpha} Z \xleftarrow{\beta} Y$ diagramra legyen $X \xleftarrow{\delta} U \xrightarrow{\gamma} Y$, ahol $U = \{(x, y) \in X \oplus Y \mid x\alpha = y\beta\}$, továbbá δ és γ az első, illetve második komponensre való vetítés megszorítása U -ra: $(x, y)\delta = x$ és $(x, y)\gamma = y$. Ekkor $(x, y) \in U$ -ra $(x, y)\delta\alpha = x\alpha = y\beta = (x, y)\gamma\beta$, így $\delta\alpha = \gamma\beta$. A harmadik diagram U' -jéhez a morfizmus pedig $u'\varphi = (u'\delta', u'\gamma') \in U$, ugyanis $u'\delta'\alpha = u'\gamma'\beta$ miatt φ valóban U -ba képez, és nyilván művelettartó. Továbbá

$$u'\varphi\delta = (u'\delta', u'\gamma')\delta = u'\delta' \Rightarrow \varphi\delta = \delta', \text{ és}$$

$$u'\varphi\gamma = (u'\delta', u'\gamma')\gamma = u'\gamma' \Rightarrow \varphi\gamma = \gamma'.$$

Végül φ egyértelmű, mert $u'\varphi$ első komponense $u'\varphi\delta = u'\delta'$ és a második komponense $u'\varphi\gamma = u'\gamma'$, ha φ kielégíti a feltételeket.

A pushoutot könnyen definiálhatjuk a nyilak megfordításával (itt a diagramokat is tükrözve rajzoltuk fel):

$$\begin{array}{c} Z \xrightarrow{\beta} Y \\ \alpha \downarrow \\ X \end{array} \quad \text{pushoutja} \quad \begin{array}{c} Z \xrightarrow{\beta} Y \\ \alpha \downarrow \# \downarrow \gamma \\ X \xrightarrow{\delta} U \end{array} \quad \text{ha } \forall \quad \begin{array}{c} Z \xrightarrow{\beta} Y \\ \alpha \downarrow \# \downarrow \gamma' \\ X \xrightarrow{\delta'} U' \end{array} \quad \exists! \varphi \quad \begin{array}{c} Z \xrightarrow{\beta} Y \\ \alpha \downarrow \quad \gamma \downarrow \# \downarrow \gamma' \\ X \xrightarrow{\delta} U \xrightarrow{\#} U' \\ \delta' \searrow \quad \varphi \searrow \end{array}$$

Az $X \xleftarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} Y$ diagramhoz vegyük a $V := \{(z\alpha, -z\beta) \mid z \in Z\}$ részmodulussal vett $U = X \oplus Y/V$ faktormodulust, és az $X \xrightarrow{\delta} U \xleftarrow{\gamma} Y$ diagramot, ahol $x\delta = \overline{(x, 0)}$ és $y\gamma = \overline{(0, y)}$. Ekkor minden $z \in Z$ -re $z\alpha\delta = \overline{(z\alpha, 0)} = \overline{(z\alpha, 0)} - \overline{0} = \overline{(z\alpha, 0)} - \overline{(z\alpha, -z\beta)} = \overline{(0, z\beta)} = z\beta\gamma$. A harmadik diagram U' -jéhez a morfizmus $(x, y)\varphi := x\delta' + y\gamma' \in U'$. Ez jól van definiálva, mert ha $\overline{(x, y)} = \overline{(x', y')}$, akkor $(x - x', y - y') = (z\alpha, -z\beta)$ alakú, tehát $(x\delta' + y\gamma') - (x'\delta' + y'\gamma') = (x - x')\delta' + (y - y')\gamma' = z\alpha\delta' - z\beta\gamma' = 0$, és φ nyilván művelettartó is. Továbbá $x\delta\varphi = \overline{(x, 0)}\varphi = x\delta'$ és $y\gamma\varphi = \overline{(0, y)}\varphi = y\gamma' \Rightarrow \delta\varphi = \delta'$ és $\gamma\varphi = \gamma'$. Végül φ egyértelmű, mert ha kielégíti a feltételeket, akkor $(x, y)\varphi = (\overline{(x, 0)} + \overline{(0, y)})\varphi = x\delta\varphi + y\gamma\varphi = x\delta' + y\gamma'$.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha modulusok pullbackjében vagy pushoutjában α vagy β monomorfizmus, illetve epimorfizmus, akkor a vele "párhuzamos" nyíl is ilyen!

Megoldás: Elég α -ra bizonyítani az állítást. Az epimorfizmus esete házi feladat. Tegyük fel, hogy a pullbackban α monomorfizmus, azaz (mivel moduluskategóriáról van szó) injektív homomorfizmus, és használjuk a 6. feladat jelöléseit és konstrukcióját. Belátjuk, hogy γ is injektív. Legyen $u = (x, y)$, ahol $x\alpha = y\beta$. Ha $u\gamma = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x\alpha = y\beta = 0$, s mivel α injektív, ebből $x = 0$, így $u = 0$ is következik.

Most tegyük fel, hogy a pushout α leképezése injektív, és valamely $y \in Y$ -ra $y\gamma = \overline{(0, y)} = 0$. Ekkor $(0, y) = (z\alpha, -z\beta)$ valamely $z \in Z$ -re, tehát $z\alpha = 0$, de α injektív, így $z = 0$, és ebből $y = -z\beta = 0\beta = 0$.

- Hf1. Bizonyítsuk be a 7. feladat állítását arra az esetre, amikor egy pullbackban, illetve pushoutban α epimorfizmus! (Használhatjuk az 6. feladatban megadott konstrukciókat!)
- Hf2. Bizonyítsuk be, hogy az egységelemes gyűrűk kategóriájában a $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ beágyazás epimorfizmus, bár nem szürjektív!