1. *Bizonyítsuk be, hogy*
a) ha α és β epimorfizmus, akkor $\alpha\beta$ is az;
b) ha α és β monomorfizmus, akkor $\alpha\beta$ is az;
c) ha $\alpha\beta$ epimorfizmus, akkor β is az;
d) ha $\alpha\beta$ monomorfizmus, akkor α is az!

Megoldás: a) $(\alpha\beta)\gamma = (\alpha\beta)\delta \Rightarrow \alpha(\beta\gamma) = \alpha(\beta\delta)$, és α epi. $\Rightarrow \beta\gamma = \beta\delta$, és β epi. $\Rightarrow \gamma = \delta$.
b) $\gamma(\alpha\beta) = \delta(\alpha\beta) \Rightarrow (\gamma\alpha)\beta = (\delta\alpha)\beta$, és β mono. $\Rightarrow \gamma\alpha = \delta\alpha$, és α mono. $\Rightarrow \gamma = \delta$.
c) $\beta\gamma = \beta\delta \Rightarrow \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\delta$, és $\alpha\beta$ epi. $\Rightarrow \gamma = \delta$.
d) $\gamma\alpha = \delta\alpha \Rightarrow \gamma\alpha\beta = \delta\alpha\beta$, és $\alpha\beta$ mono. $\Rightarrow \gamma = \delta$.

2. *Bizonyítsuk be, hogy* Mod-R*-ben az epimorfizmusok éppen a szürjektív homomorfizmusok, a monomorfizmusok pedig az injektív homomorfizmusok.*

Megoldás: Tegyük fel, hogy $X \overset{\alpha}{\to} Y$ szürjektív, és $\alpha\gamma = \alpha\delta$. Ekkor $\forall x \in X$-re $x\alpha\gamma = x\alpha\delta$, s mivel α szürjektív, minden $y \in Y$-hoz van $x \in X$, hogy $y = x\alpha$, így $y\gamma = y\delta$ minden $y \in Y$-ra, azaz $\gamma = \delta$. Tehát α epimorfizmus.
Most tegyük fel, hogy $X \overset{\alpha}{\to} Y$ nem szürjektív, így $Y_1 := \operatorname{Im}\alpha < Y$. Legyen $\gamma : Y \to Y/Y_1$ a természetes faktorizáló leképezés, és $\delta : Y \to Y/Y_1$ a 0-leképezés. Ekkor $\alpha\gamma = \alpha\delta = 0$, viszont $\operatorname{Im}\gamma = Y/Y_1 \neq 0 = \operatorname{Im}\delta$, ezért $\gamma \neq \delta$. Tehát α nem epimorfizmus.

Tegyük fel, hogy $X \overset{\alpha}{\to} Y$ injektív, és $\gamma\alpha = \delta\alpha$ valamely $\gamma, \delta : U \to X$-re. Ekkor minden $u \in U$-ra $u\gamma\alpha = u\delta\alpha$, és α injektivitása miatt ebből $u\gamma = u\delta$ következik. Ezért $\gamma = \delta$, vagyis α monomorfizmus.
Most tegyük fel, hogy $X \overset{\alpha}{\to} Y$ nem injektív. Legyen $X_1 = \operatorname{Ker}\alpha \neq 0$. Ha $\gamma : X_1 \to X$ a természetes beágyazás, és $\delta : X_1 \to X$ a 0-leképezés, akkor $\gamma\alpha = \delta\alpha$, de $\operatorname{Ker}\gamma = 0 < X_1 = \operatorname{Ker}\delta$, ezért $\gamma \neq \delta$, vagyis α nem monomorfizmus.

3. *Legyen $\mathcal{K}$ az a kategória, amelynek egyetlen a objektuma van, és $S = \operatorname{Hom}(a, a)$ egy véges, egységelemes félcsoport, amelyben $1 := \mathrm{id}_a$. Melyek lesznek* $\operatorname{Hom}(a, a)$*-ban az epimorfizmusok és a monomorfizmusok?*

Megoldás: Egy $b \in S$ elem akkor és csak akkor epimorfizmus, ha balról egyszerűsíteni lehet vele, azaz ha $bx = by \Rightarrow x = y$. Ez viszont azt jelenti, hogy a b-vel való balról szorzás injektív leképezés S-ből S-be. Mivel feltettük, hogy S véges, ebből a leképezés szürjektivitása is következik, ezért a leképezés permutációként hat S-en, következésképpen valamilyen $n > 0$-ra $b^n = 1$, és így b invertálható. Ugyanígy kijön, hogy ha b monomorfizmus, akkor b invertálható (csak ott a jobbról szorzás injektivitását használjuk). Fordítva, minden invertálható elemmel egyszerűsíteni lehet (bármelyik oldalról): $bx = by \Rightarrow x = b^{-1}bx = b^{-1}by = y$, és ugyanígy a jobb oldalon, így ezek epimorfizmusok és monomorfizmusok is. Összefoglalva: $b \in S$-re ekvivalens, hogy
(i) b epimorfizmus;
(ii) b monomorfizmus;
(iii) b invertálható;
(iv) $\exists n > 0 \; b^n = 1$.

4. *Bizonyítsuk be, hogy egy additív kategóriában véges sok objektum szorzata és koszorzata megegyezik!*

Megoldás: Két objektum szorzatára bizonyítjuk az állítást, véges sok objektum szorzatára hasonlóan megy. Feltesszük, hogy létezik a szorzat (ez mindenképpen teljesül, ha a kategória additív, és nemcsak preadditív), és belátjuk, hogy ez az objektum egyúttal koszorzat is.

Jelöljük X és Y szozatát $X\prod Y$-nal, és tartozzanak hozzá a $X \xleftarrow{\pi_1} X\prod Y \xrightarrow{\pi_2} Y$ morfizmusok. A szozat univerzális tulajdonságából következik az alábbi $\iota_1 : X \to X\prod Y$ és $\iota_2 : Y \to X\prod Y$ morfizmusok létezése, amelyek a diagramokat kommutatívvá teszik.

$$\begin{tikzcd}
& X\prod Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
X & & Y \\
& X \arrow[ul, "\mathrm{id}_X"] \arrow[ur, "0"'] \arrow[uu, dashed, "\iota_1"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X\prod Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
X & & Y \\
& Y \arrow[ul, "0"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_Y"'] \arrow[uu, dashed, "\iota_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Vegyük észre, hogy ekkor $\iota_i\pi_j = 0$, ha $i \neq j$, és $\iota_i\pi_i$ az X, illetve Y identikus morfizmusa. Belátjuk, hogy $\iota_1\pi_1+\iota_2\pi_2$ a szorzat identikus morfizmusa. Valóban, ez következik az alábbi diagram középső morfizmusának egyértelműségéből.

$$\begin{tikzcd}
& X\prod Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
X & & Y \\
& X\prod Y \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_2"'] \arrow[uu, dashed, "\pi_1\iota_1 + \pi_2\iota_2"] &
\end{tikzcd}$$

Tegyük fel most, hogy adva van két morfizmus $X \xrightarrow{\varphi_1} M \xleftarrow{\varphi_2} Y$. Ekkor létezik az alábbi diagramot kommutatívvá tevő φ:

$$\begin{tikzcd}
& X\prod Y \arrow[dd, dashed, "\varphi"'] & \\
X \arrow[ur, "\iota_1"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & & Y \arrow[ul, "\iota_2"'] \arrow[dl, "\varphi_2"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

$\varphi = \pi_1\varphi_1 + \pi_2\varphi_2$ megfelel, ugyanis $\iota_1\varphi = \iota_1\pi_1\varphi_1 + \iota_1\pi_2\varphi_2 = \mathrm{id}_X\varphi_1 + 0\varphi_2 = \varphi_1$, és hasonlóan $\iota_2\varphi = \varphi_2$. Még a φ egyértelműségét kell belátnunk. Ha egy $\psi : X\prod Y \to M$ is megfelel középső morfizmusnak, akkor $\iota_1\psi = \varphi_1$ és $\iota_2\psi = \varphi_2$, tehát $\psi = \mathrm{id}_{X\prod Y}\psi = (\pi_1\iota_1 + \pi_2\iota_2)\psi = \pi_1\iota_1\psi + \pi_2\iota_2\psi = \pi_1\varphi_1 + \pi_2\varphi_2 = \varphi$. Így $X\prod Y$ valóban az X és az Y koszorzata.

5. *A következők közül melyik definiál funktort a morfizmusokon való természetes hatással együtt?*

a) $G \mapsto G'$ *a csoportok kategóriájában;*

b) $G \mapsto Z(G)$ *a csoportok kategóriájában;*

c) $A \mapsto t(A)$ *az Abel-csoportok kategóriájában, ahol* $t(A)$ *az* A *torziórészcsoportja, azaz véges rendű elemeinek csoportja.*

Megoldás: a) Ha $\varphi : G \to H$ csoport-homomorfizmus, akkor

$$G'\varphi = \langle x^{-1}y^{-1}xy \mid x, y \in G \rangle \, \varphi = \langle (x\varphi)^{-1}(y\varphi)^{-1}(x\varphi)(y\varphi) \mid x, y \in G \rangle \leq H',$$

tehát a morfizmusokon definiálhatjuk a funktort úgy hogy φ képe $\varphi\ |_{G'}$, azaz a kommutátor-részcsoportra való megszorítás legyen. Így nyilván kovariáns funktort kapunk.

b) Az előző módszer itt nem működik, mivel a csoporthomomorfizmus a centrumot nem feltétlenül képezi a centrumba. És valóban nem lehet sem kovariáns sem kontravariáns funktort definiálni a morfizmusokon. Tekintsük például a $C_2 = \{\, 1, a \,\}$ ciklikus csoportot és a $D_3 = \langle f, t \rangle$ diéder csoportot, ahol f az egyik forgatás és t az egyik tükrözés. Legyen továbbá $C_2 \xrightarrow{\alpha} D_3 \xrightarrow{\beta} C_2$, ahol $\alpha : a \mapsto t,\ \ \beta : f \mapsto 1,\ t \mapsto a$. Ekkor $\alpha\beta = \mathrm{id}_{C_2}$, tehát $F(\alpha\beta) = \mathrm{id}_{Z(C_2)} = \mathrm{id}_{C_2}$. Viszont $Z(D_3) = 1$, tehát α és β képe is csak a triviális homomorfizmus lehet, és így a képek szorzata (akár invariáns akár kovariáns lenne a funktor) csak az azonosan 1 homomorfizmus lehetne.

c) Az a) részhez hasonlóan itt is kovariáns funktort tudunk definiálni, mert a torziórészcsoportot minden homomorfizmus torziórészcsoportba képezi.

Egy kategóriában

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd} \quad \textit{pullbackje} \quad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd} \quad \textit{ha } \forall \quad \begin{tikzcd} U' \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\delta'"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd} \quad \exists!\ \varphi \quad \begin{tikzcd} U' \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\gamma'"] \arrow[ddr, bend right, "\delta'"'] & & \\ & U \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ & X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd}$$

6. *Bizonyítsuk be, hogy* Mod-R*-ben mindig létezik pullback* ($U = \{(x, y) \mid x\alpha = y\beta \,\}$)*. Fogalmazzuk meg a pullback duálisát, a pushoutot, és bizonyítsuk be, hogy* Mod-R*-ben mindig létezik pushout* ($U = X \oplus Y / \{(z\alpha, -z\beta) \mid z \in Z \,\}$)*.*

Megoldás: Az $X \xrightarrow{\alpha} Z \xleftarrow{\beta} Y$ diagramra legyen $X \xleftarrow{\delta} U \xrightarrow{\gamma} Y$, ahol $U = \{(x, y) \in X \oplus Y \mid x\alpha = y\beta \,\}$, továbbá δ és γ az első, illetve második komponensre való vetítés megszorítása U-ra: $(x, y)\delta = x$ és $(x, y)\gamma = y$. Ekkor $(x, y) \in U$-ra $(x, y)\delta\alpha = x\alpha = y\beta = (x, y)\gamma\beta$, így $\delta\alpha = \gamma\beta$. A harmadik diagram U'-jéhez a morfizmus pedig $u'\varphi = (u'\delta', u'\gamma') \in U$, ugyanis $u'\delta'\alpha = u'\gamma'\beta$ miatt φ valóban U-ba képez, és nyilván műveletartó. Továbbá
$u'\varphi\delta = (u'\delta', u'\gamma')\delta = u'\delta' \Rightarrow \varphi\delta = \delta'$, és
$u'\varphi\gamma = (u'\delta', u'\gamma')\gamma = u'\gamma' \Rightarrow \varphi\gamma = \gamma'$.
Végül φ egyértelmű, mert $u'\varphi$ első komponense $u'\varphi\delta = u'\delta'$ és a második komponense $u'\varphi\gamma = u'\gamma'$, ha φ kielégíti a feltételeket.

A pushoutot könnyen definiálhatjuk a nyilak megfordításával (itt a diagramokat is tükrözve rajzoltuk fel):

$$
\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \\ X & \end{tikzcd}
\quad \text{pushoutja} \quad
\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\gamma"] \\ X \arrow[r, "\delta"'] & U \end{tikzcd}
\quad \text{ha } \forall \quad
\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\gamma'"] \\ X \arrow[r, "\delta'"'] & U' \end{tikzcd}
\quad \exists!\ \varphi \quad
\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[ddr, "\gamma'"] & \\ X \arrow[r, "\delta"] \arrow[drr, "\delta'"'] & U \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\ & & U' \end{tikzcd}
$$

Az $X \xleftarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} Y$ diagramhoz vegyük a $V := \{(z\alpha, -z\beta) \mid z \in Z\}$ részmodulussal vett $U = X \oplus Y/V$ faktormodulust, és az $X \xrightarrow{\delta} U \xleftarrow{\gamma} Y$ diagramot, ahol $x\delta = \overline{(x,0)}$ és $y\gamma = \overline{(0,y)}$. Ekkor minden $z \in Z$-re $z\alpha\delta = \overline{(z\alpha,0)} = \overline{(z\alpha,0)} - \overline{0} = \overline{(z\alpha,0)} - \overline{(z\alpha,-z\beta)} = \overline{(0,z\beta)} = z\beta\gamma$. A harmadik diagram U'-jéhez a morfizmus $\overline{(x,y)}\varphi := x\delta' + y\gamma' \in U'$. Ez jól van definiálva, mert ha $\overline{(x,y)} = \overline{(x',y')}$, akkor $(x-x', y-y') = (z\alpha, -z\beta)$ alakú, tehát $(x\delta' + y\gamma') - (x'\delta' + y'\gamma') = (x-x')\delta' + (y-y')\gamma' = z\alpha\delta' - z\beta\gamma' = 0$, és φ nyilván műveletttartó is. Továbbá $x\delta\varphi = \overline{(x,0)}\varphi = x\delta'$ és $y\gamma\varphi = \overline{(0,y)}\varphi = y\gamma' \Rightarrow \delta\varphi = \delta'$ és $\gamma\varphi = \gamma'$. Végül φ egyértelmű, mert ha kielégíti a feltételeket, akkor $\overline{(x,y)}\varphi = (\overline{(x,0)} + \overline{(0,y)})\varphi = x\delta\varphi + y\gamma\varphi = x\delta' + y\gamma'$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy ha modulusok pullbackjében vagy pushoutjában α vagy β monomorfizmus, illetve epimorfizmus, akkor a vele "párhuzamos" nyíl is ilyen!*

Megoldás: Elég α-ra bizonyítani az állítást. Az epimorfizmus esete házi feladat. Tegyük fel, hogy a pullbackban α monomorfizmus, azaz (mivel moduluskategóriáról van szó) injektív homomorfizmus, és használjuk a 6. feladat jelöléseit és konstrukcióját. Belátjuk, hogy γ is injektív. Legyen $u = (x,y)$, ahol $x\alpha = y\beta$. Ha $u\gamma = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x\alpha = y\beta = 0$, s mivel α injektív, ebből $x = 0$, így $u = 0$ is következik.

Most tegyük fel, hogy a pushout α leképezése injektív, és valamely $y \in Y$-ra $y\gamma = \overline{(0,y)} = 0$. Ekkor $(0,y) = (z\alpha, -z\beta)$ valamely $z \in Z$-re, tehát $z\alpha = 0$, de α injektív, így $z = 0$, és ebből $y = -z\beta = 0\beta = 0$.

Hf1. *Bizonyítsuk be a 7. feladat állítását arra az esetre, amikor egy pullbackban, illetve pushoutban α epimorfizmus! (Használhatjuk az 6. feladatban megadott konstrukciókat!)*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy az egységelemes gyűrűk kategóriájában a $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ beágyazás epimorfizmus, bár nem szürjektív!*