1. *Bizonyítsuk be, hogy a $G = \mathrm{Hom}_R(-, M)$ funktor balegzakt, azaz R-modulusok bármely $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ rövid egzakt sorozatára $0 \to G(Z) \to G(Y) \to G(X)$ egzakt.*

Megoldás: Legyenek a rövid egzakt sorozat középső homomorfizmusai α és β. A $G(\beta)$ homomorfizmus injektivitása következik abból, hogy β szürjektív, tehát $\varphi \in \mathrm{Hom}(Z, M)$-re $\beta\varphi$ csak akkor lehet 0, ha $\varphi = 0$.
A sorozat nyilván féligegzakt, mert $G(\beta)G(\alpha) = G(\alpha\beta) = G(0) = 0$.
Végül $\mathrm{Ker}\, G(\alpha) \leq \mathrm{Im}\, G(\beta)$, ugyanis $\psi \in \mathrm{Hom}(Y, M)$-re $\alpha\psi = 0$ esetén $\mathrm{Ker}\, \psi \geq \mathrm{Im}\, \alpha = \mathrm{Ker}\, \beta$, tehát a $\gamma : z \mapsto z\beta^{-1}\psi$ jól van definiálva, és nyilván műveletttartó, továbbá erre a γ-ra $\psi = \beta\gamma \in \mathrm{Im}\, G(\beta)$.

Egy kategória preadditív, ha $\mathrm{Hom}(A, B)$ Abel-csoport minden A, B objektumra, és a morfizmusok kompozíciója mindkét oldalról disztributív az összeadással. Egy preadditív kategória additív, ha van benne zéróobjektum: olyan, amelyikbe és amelyikből mindenhonnan és mindenhova egyetlen morfizmus megy, és bármely két objektumnak van szorzata. Az 5./3. feladat bizonyításából következik, hogy ekkor koszorzatuk is van, és az izomorf a szorzatukkal.

2. *Bizonyítsuk be, hogy az 1. feladatbeli G funktor akkor és csak akkor egzakt, ha M injektív.*

Megoldás: Ha M injektív, akkor tetszőleges $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ rövid egzakt sorozatra $G(Y) \xrightarrow{G(\alpha)} G(X)$ szürjektív, ugyanis minden $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, M)$-re van olyan $\psi \in \mathrm{Hom}(Y, M)$, amelyre $\alpha\psi = \varphi$. Tehát ekkor G nemcsak balegzakt, hanem egzakt is.
Ha G egzakt, akkor tetszőleges $X \xrightarrow{\alpha} Y$ injektív homomorfizmusra tekinthetjük a $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \to Y/\mathrm{Im}\, \alpha \to 0$ rövid egzakt sorozatot, és a G egzaktságából ekkor következik $G(\alpha)$ szürjektivitása, azaz, hogy minden $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, M)$-re van olyan $\psi \in \mathrm{Hom}(Y, M)$, amelyre $\varphi = \alpha\psi$. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy M injektív.

3. *Bizonyítsuk be, hogy a lánckomplexusok Comp-R kategóriája additív kategória.*

Megoldás: $\mathrm{Hom}(X_\bullet, Y_\bullet)$-ban természetesen definiálhatjuk a láncleképezések összegét az $(f + g)_n := f_n + g_n$ képlettel, ugyanis ez az $(f + g)_\bullet$ is láncleképezés: $(f_n + g_n)d'_n = f_n d'_n + g_n d'_n = d_n f_{n-1} + d_n g_{n-1} = d_n(f_{n-1} + g_{n-1})$. Az, hogy ezzel az összeadással $\mathrm{Hom}(X_\bullet, Y_\bullet)$ Abel-csoportot alkot, a $\mathrm{Hom}(X_n, Y_n)$ Abel-csoportok műveleti tulajdonságaiból következik.
A $0_\bullet$ komplexus zéróobjektum.
Belátjuk még, hogy az $X_\bullet$ és $Y_\bullet$ lánckomplexusoknak szorzatát (és mellesleg koszorzatát is) adja a

$$\cdots \longrightarrow X_n \oplus Y_n \xrightarrow{(d_n, d'_n)} X_{n-1} \oplus Y_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

lánckomplexus az első illetve második komponensekre való vetítésekkel mint láncleképezésekkel. A

$$\begin{tikzcd}
& X_\bullet \oplus Y_\bullet \arrow[dl, "\alpha_\bullet"'] \arrow[dr, "\beta_\bullet"] & \\
X_\bullet & & Y_\bullet \\
& Z_\bullet \arrow[ul, "\gamma_\bullet"] \arrow[ur, "\delta_\bullet"'] \arrow[uu, dashed, "\exists! \varepsilon_\bullet"] &
\end{tikzcd}$$

diagramhoz szintenként meg tudjuk választani (egyértelműen) az ε_n-et, csak azt kell bizonyítani, hogy ez szükségképpen láncleképezés lesz.
A következő diagramban az $X_{n-1} \oplus Y_{n-1}$ szorzattulajdonságát használjuk fel.

$$\begin{tikzcd}
& X_{n-1} \oplus Y_{n-1} \arrow[dl, "\alpha_{n-1}"'] \arrow[dr, "\beta_{n-1}"] & \\
X_{n-1} & & Y_{n-1} \\
& Z_n \arrow[ul, "d''_n\gamma_{n-1}"] \arrow[ur, "d''_n\delta_{n-1}"'] \arrow[uu, dashed, "\exists!"] &
\end{tikzcd}$$

Középső morfizmusnak $\varepsilon_n(d_n, d'_n)$ és $d''_n\varepsilon_{n-1}$ is megfelel:
$\varepsilon_n(d_n, d'_n)\alpha_{n-1} = \varepsilon_n\alpha_n d_n = \gamma_n d_n = d''_n\gamma_{n-1}$
$\varepsilon_n(d_n, d'_n)\beta_{n-1} = \varepsilon_n\beta_n d'_n = \delta_n d'_n = d''_n\delta_{n-1}$
$d''_n\varepsilon_{n-1}\alpha_{n-1} = d''_n\gamma_{n-1}$
$d''_n\varepsilon_{n-1}\beta_{n-1} = d''_n\delta_{n-1}$
A középső morfizmus egyértelműségéből következik, hogy $\varepsilon_n(d_n, d'_n) = d''_n\varepsilon_{n-1}$ minden n-re, tehát $\varepsilon_\bullet$ is láncleképezés.

4. *Legyen A az a gráfalgebra, amelyre a reguláris modulus Loewy-diagramja*

$$A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\\&2&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}.$$

Tekintsük a $0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\\&2&\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \to 1 \to 0$ *sorozatot, ahol mindegyik morfizmus a legnagyobb rangú olyan homomorfizmus (azaz a képe vektortérként maximális dimenziós), ami a Loewy-diagramokban használt báziselemeket báziselemekbe vagy 0-ba viszi. Határozzuk meg a sorozat homológiáit!*

Megoldás: Legyen a lánckomplexus $M_\bullet$ a $d_\bullet$ határleképezéssel, és az utolsó nem nulla modulus M_0. Ekkor

$\operatorname{Ker} d_4 = 1$	$\operatorname{Ker} d_3 = \begin{smallmatrix}1&&3\\&2&\end{smallmatrix}$	$\operatorname{Ker} d_2 = 2$	$\operatorname{Ker} d_1 = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$	$\operatorname{Ker} d_0 = 1$
$\operatorname{Im} d_5 = 0$	$\operatorname{Im} d_4 = 2$	$\operatorname{Im} d_3 = 2$	$\operatorname{Im} d_2 = 1$	$\operatorname{Im} d_1 = 1$
$H_4(M_\bullet) = 1$	$H_3(M_\bullet) = 1 \oplus 3$	$H_2(M_\bullet) = 0$	$H_1(M_\bullet) = 2$	$H_0(M_\bullet) = 0$

A többi homológia mind 0.

5. *Legyen* $\xi :\ 0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ *sorozat* mod-R-*ben. Bizonyítsuk be, hogy a következő állítások ekvivalensek:*
(i) ξ *egzakt, és* $\operatorname{Im}\alpha$ *direkt összeadandó* Y*-ban (így* $Y \cong X \oplus Z$*);*
(ii) ξ *egzakt, és* $\exists\alpha' : Y \to X$*, hogy* $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$*;*
(iii) ξ *egzakt, és* $\exists\beta' : Z \to Y$*, hogy* $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$*;*
(iv) $\exists\alpha : Y \to X$ *és* $\beta' : Z \to Y$*, hogy* $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$*,* $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$*,* $\alpha\beta = 0$*,* $\beta'\alpha' = 0$*, és* $\alpha'\alpha + \beta\beta' = \mathrm{id}_Y$*.*
Ilyenkor a ξ *sorozatot felhasadó rövid egzakt sorozatnak hívjuk.*

Megoldás: (i)⇒(ii): Legyen $Y = Y_1 \oplus Y_2$, ahol $Y_1 = \operatorname{Im}\alpha$, és π_1 az első komponensre való vetítés. Ekkor $\alpha' := \pi_1\alpha^{-1}$ értelmezve van, és jól van definiálva, mert α injektív. Továbbá $x \in X$-re $x\alpha\alpha' = x\alpha\pi_1\alpha^{-1} = x\alpha\alpha^{-1} = x$, tehát $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$.

(ii)⇒(iii): Tetszőleges $z \in Z$-re legyen $y \in Y$ olyan, amelyre $z = y\beta$, és legyen $\beta' : z \mapsto y - y\alpha'\alpha$. Ilyen y van, mert β szürjektív, és a β' leképezés jól definiált (és persze műveletttartó), ugyanis ha $y\beta = y'\beta = z$, akkor $(y - y')\beta = 0$ miatt $y - y' \in \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha$, azaz van olyan $x \in X$, amelyre $y - y' = x\alpha$. Tehát $(y - y\alpha'\alpha) - (y' - y'\alpha'\alpha) = (y - y') - (y - y')\alpha'\alpha = x\alpha - x\alpha\alpha'\alpha = x\alpha - x\alpha = 0$. Végül $z = y\beta$-ra $z\beta'\beta = (y - y\alpha'\alpha)\beta = y\beta - y\alpha'\alpha\beta = z - 0 = z$, vagyis $\beta\beta' = \mathrm{id}_Z$.

(iii)⇒(i): $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$ az egzaktság miatt. Belátjuk, hogy $Y = \operatorname{Ker}\beta \oplus \operatorname{Im}\beta'$.
$Y = \operatorname{Ker}\beta + \operatorname{Im}\beta'$: $y \in Y$-ra $(y - y\beta\beta')\beta = y\beta - y\beta\beta'\beta = y\beta - y\beta = 0 \Rightarrow y - y\beta\beta' \in \operatorname{Ker}\beta$ $\Rightarrow y \in \operatorname{Ker}\beta + \operatorname{Im}\beta'$.
$\operatorname{Ker}\beta \cap \operatorname{Im}\beta' = 0$: Legyen $y = z\beta' \in \operatorname{Im}\beta' \cap \operatorname{Ker}\beta$. Ekkor $0 = y\beta = z\beta'\beta = z\mathrm{id}_Z = z \Rightarrow y = z\beta' = 0\beta' = 0$.

(ii)⇒(iv): Legyen β' a (ii)⇒(iii) bizonyításában megadott homomorfizmus: $y\beta = z$ esetén $z\beta' = y - y\alpha'\alpha$. Láttuk, hogy az eleve feltett $\alpha\beta = 0$ összefüggés mellett $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$ és $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$. Továbbá $z = y\beta$-ra $z\beta'\alpha' = (y - y\alpha'\alpha)\alpha' = y\alpha' - y\alpha'\alpha\alpha' = y\alpha' - y\alpha' = 0$, így $\beta'\alpha' = 0$ is teljesül. Végül $y(\alpha'\alpha + \beta\beta') = y\alpha'\alpha + (y\beta)\beta' = y\alpha'\alpha + (y - y\alpha'\alpha) = y$ minden $y \in Y$-ra, ezért $\alpha'\alpha + \beta\beta' = \mathrm{id}_Y$.

(iv)⇒(ii): A feltételek szerint van olyan α, amelyre $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$, tehát csak azt kell bizonyítani, hogy a sorozat egzakt (ami ezúttal nem feltétel).
$\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$ injektív $\Rightarrow$ α injektív.
$\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$ szürjektív $\Rightarrow$ β szürjektív.
$\alpha\beta = 0 \Rightarrow$ a sorozat féligegzakt.
$\operatorname{Ker}\beta \leq \operatorname{Im}\alpha$: Ha $y \in \operatorname{Ker}\beta$, akkor $y = y\alpha'\alpha + y\beta\beta' = y\alpha'\alpha + 0 \in \operatorname{Im}\alpha$.

Hf1. *Határozzuk meg az összes olyan α, β homomorfizmust, amelyre a $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2 \to 0$ sorozat féligegzakt, és adjuk meg minden esetben a homológiákat!*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy egy $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ féligegzakt sorozat akkor és csak akkor homotóp a csupa-0 sorozattal, ha felhasadó egzakt.*