Homologikus algebra **7. feladatsor** *2017 ősz*

1. *(3×3-lemma) Tegyük fel, hogy az alábbi kommutatív diagram sorai egzaktak.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & X' & \to & Y' & \to & Z' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & X & \to & Y & \to & Z & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & X'' & \to & Y'' & \to & Z'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

a) Bizonyítsuk be, hogy ha a középső oszlop egzakt, akkor első oszlop akkor és csak akkor egzakt, ha a harmadik az.

b) Mutassuk meg, hogy az első és utolsó oszlop egzaktságából együtt sem következik, hogy a középső oszlop egzakt.

Megoldás: a) A középső oszlop féligegzaktságából következik a másik két oszlop féligegzaktsága:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & X' & \xrightarrow{\varphi'} & Y' & \xrightarrow{\psi'} & Z' & \to & 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\
0 & \to & X & \xrightarrow{\varphi} & Y & \xrightarrow{\psi} & Z & \to & 0 \\
 & & \downarrow \alpha' & & \downarrow \beta' & & \downarrow \gamma' & & \\
0 & \to & X'' & \xrightarrow{\varphi''} & Y'' & \xrightarrow{\psi''} & Z'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

$\alpha\alpha'\varphi'' = \varphi'\beta\beta' = 0$, és φ'' injektív, ezért $\alpha\alpha' = 0$;
$\psi'\gamma\gamma' = \beta\beta'\psi'' = 0$, és ψ' szürjektív, ezért $\gamma\gamma' = 0$.
Így az oszlopokat tekinthetjük lánckomplexusoknak, és a diagramot lánckomplexusok rövid egzakt sorozatának. Ebből a homológiák hosszú egzakt sorozatát kapjuk:

$$\cdots \to H_n(X_\bullet) \to H_n(Y_\bullet) \to H_n(Z_\bullet) \to H_{n-1}(X_\bullet) \to H_{n-1}(Y_\bullet) \cdots$$

Mivel $Y_\bullet$ egzakt, minden homológiája 0, és így az előbbi sorozat egzaktságából következik, hogy $H_n(Z_\bullet) \cong H_{n-1}(X_\bullet)$ minden n-re, tehát ha az egyik lánckomplexus egzakt, azaz minden homológiája 0, akkor a másik is az.

b) Egyszerű diagramvadászattal látható, hogy β injektivitása és β' szürjektivitása következik a feltételekből, sőt, ha a középső oszlop féligegzakt, akkor az a) rész hosszú egzakt sorozata azt adja, hogy egzakt is. Tehát olyan ellenpéldát kell keresni, ahol $\operatorname{Im}\beta \neq \operatorname{Ker}\beta'$, de minden más helyen mindkét irányban teljesül az egzaktság. Vektorterekből is konstruálhatunk ilyen ellenpéldát. A következő diagramban a mátrixok jobbról hatnak, és így balról jobbra szorzunk, amikor a leképezések kompozícióját számoljuk.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & 0 & \xrightarrow{0} & K & \xrightarrow{[1]} & K & \to & 0 \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow [0\,1] & & \downarrow [1] & & \\
0 & \to & K & \xrightarrow{[1\,0]} & K\oplus K & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]} & K & \to & 0 \\
 & & \downarrow [1] & & \downarrow \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right] & & \downarrow 0 & & \\
0 & \to & K & \xrightarrow{[1]} & K & \xrightarrow{0} & 0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

2. *Tekintsük a következő kommutatív diagramot, amelynek a sorai egzaktak.*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \to & X_n & \stackrel{i_n}{\to} & Y_n & \stackrel{p_n}{\to} & Z_n & \stackrel{\partial_n}{\to} & X_{n-1} & \stackrel{i_{n-1}}{\to} & Y_{n-1} & \to & \cdots \\
 & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \beta_n & & \downarrow \gamma_n & & \downarrow \alpha_{n-1} & & \downarrow \beta_{n-1} & & \\
\cdots & \to & X'_n & \stackrel{i'_n}{\to} & Y'_n & \stackrel{p'_n}{\to} & Z'_n & \stackrel{\partial'_n}{\to} & X'_{n-1} & \stackrel{i'_{n-1}}{\to} & Y'_{n-1} & \to & \cdots
\end{array}$$

Bizonyítsuk be, hogy ha γ_n izomorfizmus, akkor létezik egy egzakt sorozat:

$$\cdots \to X_n \xrightarrow{(\alpha_n, i_n)} X'_n \oplus Y_n \xrightarrow{i'_n - \beta_n} Y'_n \xrightarrow{p'_n\gamma_n^{-1}\partial_n} X_{n-1} \to X'_{n-1} \oplus Y_{n-1} \to Y'_{n-1} \cdots$$

Megoldás: Féligegzaktság:
$(\alpha_n, i_n)(i'_n - \beta_n) = \alpha_n i'_n - i_n\beta_n = 0$;
$(i'_n - \beta_n)p'_n\gamma_n^{-1}\partial_n = i'_n p'_n\gamma_n^{-1}\partial_n - \beta_n p'_n\gamma_n^{-1}\partial_n = 0 - p_n\gamma_n\gamma_n^{-1}\partial_n = -p_n\partial_n = 0$;
$p'_n\gamma_n^{-1}\partial_n(\alpha_{n-1}, i_{n-1}) = (p'_n\gamma_n^{-1}\partial_n\alpha_{n-1},\ p'_n\gamma_n^{-1}\partial_n i_{n-1}) = (p'_n\gamma_n^{-1}\gamma_n\partial'_n,\ 0) = (p'_n\partial'_n,\ 0) = (0, 0)$.
Egzaktság $X'_n \oplus Y_n$-nél:
Ha $(x'_n, y_n) \in \mathrm{Ker}(i'_n - \beta_n)$, azaz $x'_n i'_n - y_n\beta_n = 0$, akkor $0 = x'_n i'_n p'_n = y_n\beta_n p'_n = y_n p_n\gamma_n$, de γ_n injektív, így $y_n p_n = 0$. Ezért $\exists x_n \in X_n$: $y_n = x_n i_n \Rightarrow x'_n i'_n = y_n\beta_n = x_n i_n\beta_n = x_n\alpha_n i'_n \Rightarrow (x'_n - x_n\alpha_n)i'_n = 0 \Rightarrow \exists z'_{n+1} \in Z'_{n+1}$, és ehhez γ_{n+1} szürjektivitása miatt z_{n+1}, hogy $x'_n - x_n\alpha_n = z'_{n+1}\partial'_{n+1} = z_{n+1}\gamma_{n+1}\partial'_{n+1} = z_{n+1}\partial_{n+1}\alpha_n \Rightarrow x^*_n := (x_n + z_{n+1}\partial_{n+1})^*$-re $x'_n = x^*_n\alpha_n$, és $x^*_n i_n = x_n i_n + z_{n+1}\partial_{n+1}i_n = y_n + 0 = y_n$, tehát $(x'_n, y_n) \in \mathrm{Im}(\alpha_n, i_n)$.
Egzaktság Y'_n-nél:
Ha $y'_n \in \mathrm{Ker}\, p'_n\gamma_n^{-1}\partial_n$, azaz $y'_n p'_n\gamma_n^{-1}\partial_n = 0$, akkor $\exists y_n$: $y'_n p'_n\gamma_n^{-1} = y_n p_n \Rightarrow y'_n p'_n = y_n p_n\gamma_n = y_n\beta_n p'_n \Rightarrow (y'_n - y_n\beta)p'_n = 0 \Rightarrow \exists x'_n$: $y'_n - y_n\beta = x'_n i'_n$, azaz $y'_n = (x'_n, -y_n)(i'_n - \beta_n) \in \mathrm{Im}(i'_n - \beta_n)$.
Egzaktság X_{n-1}-nél:
Ha $x_{n-1}(\alpha_{n-1}, i_{n-1}) = 0$, azaz $x_{n-1}\alpha_{n-1} = 0$ és $x_{n-1}i_{n-1} = 0$, akkor $\exists z_n$: $x_{n-1} = z_n\partial_n \Rightarrow 0 = x_{n-1}\alpha_{n-1} = z_n\partial_n\alpha_{n-1} = z_n\gamma_n\partial'_n \Rightarrow \exists y'_n$: $z_n\gamma_n = y'_n p'_n \Rightarrow x_{n-1} = z_n\partial_n = z_n\gamma_n\gamma_n^{-1}\partial_n = y'_n p'_n\gamma_n^{-1}\partial_n \in \mathrm{Im}(p'_n\gamma_n^{-1}\partial_n)$.

3. *(5-lemma) Tegyük fel, hogy a következő kommutatív diagram sorai egzaktak.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \to & B & \to & C & \to & D & \to & E \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\
A' & \to & B' & \to & C' & \to & D' & \to & E'
\end{array}$$

Mutassuk meg, hogy
a) ha α epimorfizmus, és β és δ monomorfizmusok, akkor γ monomorfizmus;
b) ha ε monomorfizmus, és β és δ epimorfizmusok, akkor γ epimorfizmus.
c) ha α, β, δ és ε izomorfizmusok, akkor γ is izomorfizmus.

Megoldás: Nevezzük el a vízszintes nyilakat is:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{\varphi_1} & B & \xrightarrow{\varphi_2} & C & \xrightarrow{\varphi_3} & D & \xrightarrow{\varphi_4} & E \\ \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \downarrow\delta & & \downarrow\varepsilon \\ A' & \xrightarrow{\psi_1} & B' & \xrightarrow{\psi_2} & C' & \xrightarrow{\psi_3} & D' & \xrightarrow{\psi_4} & E' \end{array}$$

a) Tegyük fel, hogy valamely $c \in C$-re $c\gamma = 0$. Ekkor $0 = c\gamma\psi_3 = c\varphi_3\delta$, de δ injektív $\Rightarrow$ $c\varphi_3 = 0 \Rightarrow \exists b$: $c = b\varphi_2 \Rightarrow 0 = c\gamma = b\varphi_2\gamma = b\beta\psi_2 \Rightarrow \exists a'$: $b\beta = a'\psi_1$. De α szürjektív, ezért $\exists a$: $a' = a\alpha \Rightarrow b\beta = a'\psi_1 = a\alpha\psi_1 = a\varphi_1\beta$. Mivel β injektív, ebből $b = a\varphi_1$ következik, tehát $c = b\varphi_2 = a\varphi_1\varphi_2 = 0$.

b) Legyen $c' \in C'$ tetszőleges elem. Mivel δ szürjektív, $\exists d$: $c'\psi_3 = d\delta$. $\Rightarrow 0 = c'\psi_3\psi_4 = d\delta\psi_4 = d\varphi_4\varepsilon$, de ε injektív $\Rightarrow d\varphi_4 = 0 \Rightarrow \exists c$: $d = c\varphi_3 \Rightarrow c'\psi_3 = d\delta = c\varphi_3\delta = c\gamma\psi_3 \Rightarrow$ $(c' - c\gamma) \in \operatorname{Ker}\psi_3 = \operatorname{Im}\psi_2$, azaz $\exists b'$: $c' - c\gamma = b'\psi_2$. De β szürjektív, így $\exists b$: $b' = b\beta$, vagyis $c' - c\gamma = b\beta\psi_2 = b\varphi_2\gamma \Rightarrow c' = (c + b\varphi_2)\gamma$. Ezzel beláttuk, hogy γ szürjektív.

c) Az a) és a b) rész feltételei is teljesülnek, tehát γ injektív és szürjektív is, így izomorfizmus.

Hf1. *Bizonyítsuk be a komplexusok $0_\bullet \to X_\bullet \to Y_\bullet \to Z_\bullet \to 0_\bullet$ rövid egzakt sorozatához tartozó hosszú egzakt sorozatban az egzaktságot $\mathrm{H}_n(Y_\bullet)$-nál!*

Hf2. *Tekintsük az $f_\bullet$:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots & \to & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \rightarrowtail & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \rightarrowtail & \mathbb{Z}_4 & \to & \cdots \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow 0 & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow 0 & & \\ \cdots & \to & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \to & \cdots \end{array}$$

láncleképezést, ahol a felső lánckomplexus $X_\bullet$, az alsó $Y_\bullet$.
Határozzuk meg a $0_\bullet \to \operatorname{Ker} f_\bullet \to X_\bullet \to Y_\bullet \to 0_\bullet$ rövid egzakt sorozathoz tartozó hosszú egzakt sorozatot!