1. *Bizonyítsuk be, hogy a* $\mathrm{Hom}_R(R, M)$ *jobb* R*-modulus minden* $M \in \text{Mod-}R$*-re, és lássuk be, hogy* $\mathrm{Hom}_R(R, -)$ *additív, kovariáns funktor, amely természetesen izomorf az identitás funktorral!*

Megoldás: Ezúttal kényelmesebb lesz a $\mathrm{Hom}_R(R, M)$ elemeit balról hattatni az R_R modulus elemein. Definiáljuk $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$-re és $r \in R$-re a $\varphi r \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$ elemet a $(\varphi r)x = \varphi(rx)$ hatással.
φr valóban modulus-homomorfizmus:
$x, y \in R$-re $(\varphi r)(x + y) = \varphi(r(x + y)) = \varphi(rx + ry) = \varphi(rx) + \varphi(ry) = (\varphi r)x + (\varphi r)y$,
$x, s \in R$-re $(\varphi r)(xs) = \varphi(r(xs)) = \varphi(rx)s) = \varphi(rx) \cdot s = (\varphi r)(x) \cdot s$.
$\mathrm{Hom}_R(R, M)$ modulus ezzel a gyűrűhatással:
$(\varphi + \psi)r = \varphi r + \psi r$:
$((\varphi + \psi)r)x = (\varphi + \psi)(rx) = \varphi(rx) + \psi(rx) = (\varphi r)x + (\psi r)x = (\varphi r + \psi r)x$
$\varphi(r + s) = \varphi r + \varphi s$:
$(\varphi(r+s))x = \varphi((r+s)x) = \varphi(rx+sx) = \varphi(rx)+\varphi(sx) = (\varphi r)x+(\varphi s)x = (\varphi r+\varphi s)x$.
$\varphi(rs) = (\varphi r)s$:
$(\varphi(rs))x = \varphi((rs)x) = \varphi(r(sx)) = (\varphi r)(sx) = ((\varphi r)s)x$.
$\varphi 1 = \varphi$:
$(\varphi 1)x = \varphi(1x) = \varphi x$.
$M \cong \mathrm{Hom}_R(R, M)$:
$\forall m \in M$-re $\exists!$ $\varphi_m \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$, amire $\varphi_m(1) = m$, ugyanis R_R szabad modulus az 1-gyel mint szabad generátorral. Legyen $T_M : m \mapsto \varphi_m$. Ez a T_M modulus-homomorfizmus:
$\varphi_{m+m'}(1) = m + m' = \varphi_m(1) + \varphi_{m'}(1) = (\varphi_m + \varphi_{m'})(1)$,
$\varphi_{mr}(1) = mr = \varphi_m(1) \cdot r = \varphi_m(1r) = \varphi_m(r1) = (\varphi_m r)(1)$.
T_M injektív, mert ha $\varphi_m = 0$, akkor $m = \varphi_m(1) = 0$.
T_M szürjektív, mert tetszőleges $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$-re $m := \varphi(1)$-gyel $\varphi(r) = \varphi(1 \cdot r) = \varphi(1)r = mr = \varphi_m(1)r = \varphi_m(r)$ minden $r \in R$-re, így $\varphi = \varphi_m$.
Végül T_M $(M \in \text{Mod-}R)$ természetes izomorfizmus a $\mathrm{Hom}_R(R, -)$ és az identitás funktor között: $m \in M \in \text{mod-}R$-re
$m \xmapsto{T_M} \varphi_m \xmapsto{\mathrm{Hom}(R,\alpha)} \varphi_m\alpha$
$m \xmapsto{\alpha} m\alpha \xmapsto{T_N} \varphi_{m\alpha}$, és
$1(\varphi_m\alpha) = \varphi_m(1)\alpha = m\alpha = \varphi_{m\alpha}(1)$, így $\varphi_m\alpha = \varphi_{m\alpha}$ az egész R-en.

2. *Egy* R *gyűrű öröklődő, ha minden injektív modulus minden homomorf képe injektív. (Pl.* $\mathbb{Z}$ *öröklődő.) Bizonyítsuk be, hogy ha* R *öröklődő, akkor minden* $M, N \in R\text{-mod}$ *modulusra* $\mathrm{Ext}^k_R(M, N) = 0$*, ha* $k > 1$.

Megoldás: Vegyük az $\mathrm{Ext}^k_R(M, -)$ funktort úgy, mint a $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ funktor injektív feloldással definiált jobbderivált funktorát. Az N modulushoz vegyük a $0 \to N \to Q \to Q/N \to 0$ injektív feloldást, és a hozzá tartozó $0 \to Q \to Q/N \to 0$ csonkolt injektív feloldást. Ha ennek vesszük a $\mathrm{Hom}(M, -)$ funktor általi képét, akkor a kapott lánckomplexusban minden $k > 1$ indexű tag 0, így a megfelelő homológiák mindegyike 0, azaz $\mathrm{Ext}^k(M, N) = 0$ minden $k > 1$-re.

3. *Legyen* $0 \to K_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ *egzakt, és tegyük fel, hogy itt* P_i *projektív minden* i*-re. Bizonyítsuk be, hogy* $\mathrm{Ext}^{n+k}_R(M, N) \cong \mathrm{Ext}^k_R(K_n, N)$ *minden* $k \geq 1$*-re!*

Megoldás: Az állítást n-re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Legyen a projektív feloldás első lépése $0 \to K_1 \to P_0 \to M \to 0$. Ekkor $0 \to K_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to K_1 \to 0$ is egzakt. Az indukciós feltevés szerint $\mathrm{Ext}^k(K_n, N) \cong \mathrm{Ext}^{k+n-1}(K_1, N)$. Továbbá a $0 \to K_1 \to P_0 \to M \to 0$ rövid egzakt sorozatból a $\mathrm{Hom}(-, N)$ funktor által kapott

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i(P_0, N) \to \mathrm{Ext}^i(K_1, N) \to \mathrm{Ext}^{i+1}(M, N) \to \mathrm{Ext}^{i+1}(P_0, N) \to \cdots$$

hosszú egzakt sorozatban a P_0 projektivitása miatt $\mathrm{Ext}^i(P_0, N) = \mathrm{Ext}^{i+1}(P_0, N) = 0$, ha $i \geq 1$, tehát a két középső tag izomorf. Következésképpen $\mathrm{Ext}^{k+n-1}(K_1, N) \cong \mathrm{Ext}^{k+n}(M, N)$.

4. *Tegyük fel, hogy az A gráfalgebra reguláris modulusának Loewy-diagramja* $A_A = \begin{smallmatrix} &1& \\ &2& \\ 1&&3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}$.

a) Határozzuk meg $\mathrm{Ext}^3_A(\,{\scriptstyle 1}\,, {\scriptstyle 1}\,)$ *dimenzióját.*

b) Számoljuk ki $\dim \mathrm{Ext}^3_A(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$*-et!*

c) Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re létezik $k > n$, hogy $\dim \mathrm{Ext}^k_A(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \neq 0$.

Megoldás: a) Számítsuk ki az ${\scriptstyle 1}$ projektív feloldásában a 2. magot:

$$0 \to {\scriptstyle 4} \to \begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} &1& \\ &2& \\ 1&&3 \end{smallmatrix} \to {\scriptstyle 1} \to 0.$$

Az előző feladat szerint $\mathrm{Ext}^3(\,{\scriptstyle 1}\,, {\scriptstyle 1}\,) \cong \mathrm{Ext}^1(\,{\scriptstyle 4}\,, {\scriptstyle 1}\,)$.
A ${\scriptstyle 4}$ projektív feloldásának első lépése:

$$0 \to {\scriptstyle 1} \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix} \to {\scriptstyle 4} \to 0.$$

Ebből a $\mathrm{Hom}(-, {\scriptstyle 1}\,)$ funktorral kapott hosszú egzakt sorozat

$$0 \to \mathrm{Hom}(\,{\scriptstyle 4}\,, {\scriptstyle 1}\,) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}, {\scriptstyle 1}\,) \to \mathrm{Hom}(\,{\scriptstyle 1}\,, {\scriptstyle 1}\,) \to \mathrm{Ext}^1(\,{\scriptstyle 4}\,, {\scriptstyle 1}\,) \to \mathrm{Ext}^1(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}, {\scriptstyle 1}\,) \to \cdots$$

Mivel $\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}$ projektív, $\mathrm{Ext}^1(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}, {\scriptstyle 1}\,) = 0$. Másrészt $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}, {\scriptstyle 1}\,) = 0$, ezért $\mathrm{Ext}^1(\,{\scriptstyle 4}\,, {\scriptstyle 1}\,) \cong \mathrm{Hom}(\,{\scriptstyle 1}\,, {\scriptstyle 1}\,)$, és az utóbbi 1-dimenziós.

b) Ugyanazokat a projektív feloldásokat használjuk, mint az a) részben, csak a $\mathrm{Hom}(-, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$ funktort alkalmazzuk. Itt is azt kapjuk, hogy $\mathrm{Ext}^3(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \cong \mathrm{Ext}^1(\,{\scriptstyle 4}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \cong \mathrm{Hom}(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$, és az utóbbi 1-dimenziós.

c) A

$$0 \to {\scriptstyle 1} \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} &1& \\ &2& \\ 1&&3 \end{smallmatrix} \to {\scriptstyle 1} \to 0$$

sorozatból a 3. feladat alapján következik, hogy $\mathrm{Ext}^{k+3}_R(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \cong \mathrm{Ext}^k_R(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$, ha $k > 1$. De tudjuk, hogy $\mathrm{Ext}^3(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \neq 0$, így tetszőleges i-re $\mathrm{Ext}^{3i}(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \cong \mathrm{Ext}^3(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \neq 0$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_4$. Határozzuk meg $\mathbb{Z}_4$-nek $\mathbb{Z}_4$-gyel vett bővítéseit ekvivalencia erejéig! Hányadrendű elemeknek felelnek meg ezek az $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$-ben mint Abel-csoportban?*

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy egy additív kovariáns funktor akkor és csak akkor visz minden rövid egzakt sorozatot jobbról egzaktba* ($0 \to X \to Y \to Z \to 0$ *egzakt* $\Rightarrow F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ *egzakt*)*, ha minden egzakt* $X \to Y \to Z \to 0$ *sorozatra az* $F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ *sorozat egzakt.*

Hf2. *Határozzuk meg az* $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3)$ *csoportot, és adjuk meg* $\mathbb{Z}_3$*-nak* $\mathbb{Z}_3$*-mal két egymással nem ekvivalens, nem felhasadó bővítését!*