Homologikus algebra **Zh** *2017. december 11.*

1. *Tegyük fel, hogy $e, f \in R$ idempotensek, és $ef = 0$. Bizonyítsuk be, hogy $e + f - fe$ is idempotens, és eR direkt összeadandója $(e + f - fe)R$-nek.*

Megoldás: $(e + f - fe)(e + f - fe) = e^2 + ef - efe + fe + f^2 - f^2e - fe^2 - fef + fefe = e + 0 - 0 + fe + f - fe - fe - 0 + 0 = e + f - fe$, tehát $e + f - fe$ idempotens. Legyen $U = (e + f - fe)R$. Ekkor $(e + f - fe)e = e^2 + fe - fe^2 = e + fe - fe = e$ benne van U-ban, tehát $eR \le U$. Végül eR direkt összeadandója R_R-nek, így U-nak is: ha $R_R = eR \oplus W$, akkor $U = (eR+W) \cap U = eR + (W \cap U)$ (ld. 1/Hf1.), és $eR \cap W \cap U \le W \cap U = 0$ miatt $U = eR \oplus (W \cap U)$.

2. *Bizonyítsuk be, hogy a $\prod_{p \text{ prím}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ direkt szorzatnak van $\mathbb{Q}$-val izomorf részcsoportja. (Útmutatás: keressünk a direkt szorzatban végtelen rendű elemet.)*

Megoldás: 1. megoldás: $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ injektív, így ezek direkt szorzata, $G := \prod_{p \text{ prím}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ is injektív. Tudjuk, hogy az injektív Abel-csoportok $\mathbb{Q}$-val és $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-ekkel izomorf csoportok direkt összegei. G-ben van végtelen rendű elem, pl. ha minden p-re kiválasztunk $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-ből egy a_p p-edrendű elemet, akkor $(a_2, a_3, a_5, a_7, \ldots, a_p, \ldots)$ végtelen rendű, mert minden n-nél van nagyobb prímszám, tehát a megfelelő komponens n-szerese nem lesz 0. De a kváziciklikus csoport minden eleme véges rendű, így ilyenek direkt összegében is minden elem véges rendű. Ebből következik, hogy G direkt összegre bontásában van $\mathbb{Q}$-val izomorf komponens is.

2. megoldás: Bebizonyíthatjuk az állítást anélkül is, hogy az előadáson kimondott, de nem bizonyított felbontási tételt használnánk. Mivel G-ben van végtelen rendű elem (a másik bizonyításban konstruált $(a_2, a_3, a_5, a_7, \ldots, a_p, \ldots)$), az $\mathbb{Z}$-vel izomorf végtelen rendű ciklikus részcsoportot generál. Azaz van $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ injektív leképezés. Mivel G injektív csoportok direkt szorzata, tehát maga is injektív, ez a φ keresztülvezethető a $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ beágyazáson: $\varphi = \iota\psi$ valamely $\psi : \mathbb{Q} \to G$-re. A kapott ψ is injektív, ugyanis ha $\operatorname{Ker}\psi \ne 0$, akkor $\mathbb{Z} \cap \operatorname{Ker}\psi \ne 0$ ($\mathbb{Q}$ minden nem nulla részcsoportja metszi $\mathbb{Z}$-t, mert bármely nemnulla racionális számnak van nemnulla egész többszöröse), vagyis akkor ι sem lenne injektív. Így G-nek van $\mathbb{Q}$-val izomorf részcsoportja, és az szükségképpen direkt összeadandó, mert $\mathbb{Q}$ maga is injektív.

3. *Legyen*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & & & \\ A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \end{array}$$

kommutatív diagram egzakt sorokkal. Bizonyítsuk be, van olyan $\gamma : C \to C'$ homomorfizmus, amellyel a diagram kommutatív marad.

Megoldás: Nevezzük el az egzakt sorok morfizmusait is:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \to & 0 \\ \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & & & \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \to & 0 \end{array}$$

Legyen $c \in C$. Ekkor van $b \in B$: $c = bg$. Legyen $c\gamma := b\beta g'$. Be kell látni, hogy ez a leképezés jól van definiálva. Ha $c = b_1 g = b_2 g$, akkor $(b_1 - b_2)g = 0 \Rightarrow b_1 - b_2 \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists a \in A$: $af = b_1 - b_2 \Rightarrow b_1\beta g' - b_2\beta g' = (b_1 - b_2)\beta g' = af\beta g' = a\alpha f' g' = 0$. A diagramvadász lemmából következik, hogy a megadott $\gamma : C \to C'$ leképezés modulushomomorfizmus, és a definíciója szerint $bg\gamma = b\beta g'$ minden $b \in B$-re, azaz a diagram kommutatív.

4. *A $0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_{12} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}_2 \to 0$ sorozat féligegzakt, és $\alpha, \beta, \gamma \ne 0$. Határozzuk meg a homológiákat.*

Megoldás: Mivel ciklikus csoportok részcsoportjai és faktorai is ciklikusak, elég a magok és képek rendjét kiszámolni. $\alpha \ne 0 \Rightarrow \operatorname{Ker}\alpha \ne \mathbb{Z}_2 \Rightarrow \operatorname{Ker}\alpha = 0$, azaz α injektív, és így $\operatorname{Im}\alpha \cong \mathbb{Z}_2$. Másrészt $\mathbb{Z}_{12}/\operatorname{Ker}\beta \cong \operatorname{Im}\beta \le \mathbb{Z}_8$, tehát $|\operatorname{Ker}\beta|$ osztható 3-mal, és a féligegzaktság miatt $|\operatorname{Im}\alpha| = 2$-vel is, így 6-tal is. De $\operatorname{Ker}\beta \ne \mathbb{Z}_{12}$, ezért $\operatorname{Ker}\beta \cong \mathbb{Z}_6$, és $\operatorname{Im}\beta \cong \mathbb{Z}_{12}/\operatorname{Ker}\beta \cong \mathbb{Z}_2$. Viszont $\gamma \ne 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\gamma \ne 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\gamma = \mathbb{Z}_2$, amiből $|\operatorname{Ker}\gamma| = 8/2 = 4$, tehát $\operatorname{Ker}\gamma \cong \mathbb{Z}_4$. Ezekből a homológiák a nemnulla tagoknál rendre 0, $\mathbb{Z}_6/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$ és 0.

5. *Adjuk meg az A algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha $A = K\Gamma/I$, ahol Γ:*

és $I = (\alpha\gamma, \beta\alpha - \gamma^2, \gamma^2\beta)$.

Megoldás: Mivel a gráfban minden csúcsból minden csúcsba legföljebb egy él megy, átírhatjuk a generáló relációkat csúcssorozatokra: 122, 212 − 222 és 2221. A reguláris modulus Loewy-diagramja:

$$A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \\ & 2 & & 1 \end{smallmatrix}$$

Ugyanis az első projektív harmadik sorában nem lehet 2, mert nincs 122 út, és az 121 utat nem lehet folytatni, mert $(121)2 = 1(212) = 1(222) = (122)2 = 0$. A második projektív harmadik sorában a 212 és a 222 út ugyanaz, és van még 221 út is, viszont semelyik nem folytatható: $(212)1 = (222)1 = 2221 = 0$, $(212)2 = 2(122) = 0$, végül $(221)2 = 2(212) = 2(222) = (222)2 = (212)2 = 2(122) = 0$.

6. *Legyen az A algebra reguláris modulusának Loewy-diagramja* $A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 2 & \\ 1 & & 2 \\ 2 & & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix}$. *Határozzuk meg az* $\mathrm{Ext}^1(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix})$ *vektortér dimenzióját! Keressünk olyan modulust, amelyet megkaphatunk az* $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$*-nek önmagával való nem felhasadó bővítéseként!*

Megoldás: Írjuk fel az $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$ projektív feloldásának az első lépését: $0 \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 2 & \\ 1 & & 2 \\ 2 & & \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \to 0$. Ha erre alkalmazzuk a $\mathrm{Hom}(-, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix})$ funktort, akkor a hosszú egzakt sorozat első néhány tagja

$$0 \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 2 & \\ 1 & & 2 \\ 2 & & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(\begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 2 & \\ 1 & & 2 \\ 2 & & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}) = 0.$$

Ebben az első és a második Hom egydimenziós (a generátor elem csak az $M = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$ modulus egydimenziós Me_1 alterébe mehet, tehát a leképezés skalár szorzó erejéig egyértelmű. Ezért a köztük menő injektív leképezés egyúttal szürjektív is, és így a következő morfizmus 0. De akkor az egzaktság miatt azt kapjuk, hogy $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}) \cong \mathrm{Ext}^1(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix})$. Az előbbi viszont kétdimenziós, mert az első komponensre való vetítés és a második komponensre való vetítés megkomponálva a természetes beágyazással kigenerálja az összes homomorfizmust. Tehát $\dim \mathrm{Ext}^1(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}) = 2$. Egy nem felhasadó bővítést megkaphatunk az első projektív modulus faktormodulusaként, ha felülről a második kettes típusú báziselem által generált egydimenziós részmodulussal faktorizálunk: $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$. (Egy ettől lineárisan független bővítés kevésbé nyilvánvaló, de megkonstruálható: $\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 1 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$).