Homologikus algebra **Zh** *2017. december 11.*

1. Tegyük fel, hogy $e, f \in R$ idempotensek, és $ef = 0$. Bizonyítsuk be, hogy $e + f - fe$ is idempotens, és eR direkt összeadandója $(e + f - fe)R$-nek.

2. Bizonyítsuk be, hogy a $\prod\limits_{p \text{ prím}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ direkt szorzatnak van $\mathbb{Q}$-val izomorf részcsoportja. (Útmutatás: keressünk a direkt szorzatban végtelen rendű elemet.)

3. Legyen

$$\begin{array}{ccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & & & \\ A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \end{array}$$

kommutatív diagram egzakt sorokkal. Bizonyítsuk be, van olyan $\gamma : C \to C'$ homomorfizmus, amellyel a diagram kommutatív marad.

4. A $0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_{12} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}_2 \to 0$ sorozat féligegzakt, és $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$. Határozzuk meg a homológiákat.

5. Adjuk meg az A algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha $A = K\Gamma/I$, ahol Γ: $\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$ és $I = (\alpha\gamma, \beta\alpha - \gamma^2, \gamma^2\beta)$.

6. Legyen az A algebra reguláris modulusának Loewy-diagramja $A_A = \begin{smallmatrix} 1 & \\ 2 & \\ 1 & 2 \\ 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix}$. Határozzuk meg az $\mathrm{Ext}^1(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix})$ vektortér dimenzióját! Keressünk olyan modulust, amelyet megkaphatunk az $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$-nek önmagával való nem felhasadó bővítéseként!

Homologikus algebra **Zh** *2017. december 11.*

1. Tegyük fel, hogy $e, f \in R$ idempotensek, és $ef = 0$. Bizonyítsuk be, hogy $e + f - fe$ is idempotens, és eR direkt összeadandója $(e + f - fe)R$-nek.

2. Bizonyítsuk be, hogy a $\prod\limits_{p \text{ prím}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ direkt szorzatnak van $\mathbb{Q}$-val izomorf részcsoportja. (Útmutatás: keressünk a direkt szorzatban végtelen rendű elemet.)

3. Legyen

$$\begin{array}{ccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & & & \\ A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \end{array}$$

kommutatív diagram egzakt sorokkal. Bizonyítsuk be, van olyan $\gamma : C \to C'$ homomorfizmus, amellyel a diagram kommutatív marad.

4. A $0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_{12} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}_2 \to 0$ sorozat féligegzakt, és $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$. Határozzuk meg a homológiákat.

5. Adjuk meg az A algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha $A = K\Gamma/I$, ahol Γ: $\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$ és $I = (\alpha\gamma, \beta\alpha - \gamma^2, \gamma^2\beta)$.

6. Legyen az A algebra reguláris modulusának Loewy-diagramja $A_A = \begin{smallmatrix} 1 & \\ 2 & \\ 1 & 2 \\ 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix}$. Határozzuk meg az $\mathrm{Ext}^1(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix})$ vektortér dimenzióját! Keressünk olyan modulust, amelyet megkaphatunk az $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$-nek önmagával való nem felhasadó bővítéseként!