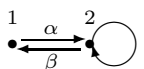


1. Tegyük fel, hogy  $e, f \in R$  idempotensek, és  $ef = 0$ . Bizonyítsuk be, hogy  $e + f - fe$  is idempotens, és  $eR$  direkt összeadandója  $(e + f - fe)R$ -nek.
2. Bizonyítsuk be, hogy a  $\prod_{p \text{ prím}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$  direkt szorzatnak van  $\mathbb{Q}$ -val izomorf részcsoportja. (Útmutatás: keressünk a direkt szorzatban végtelen rendű elemet.)

3. Legyen

$$\begin{array}{ccccccc} A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & & & \\ A' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

kommutatív diagram egzakt sorokkal. Bizonyítsuk be, van olyan  $\gamma : C \rightarrow C'$  homomorfizmus, amellyel a diagram kommutatív marad.

4. A  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_{12} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$  sorozat féligegzakt, és  $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ . Határozzuk meg a homológiákat.
5. Adjuk meg az  $A$  algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha  $A = K\Gamma/I$ , ahol  $\Gamma$ :   $\gamma$  és  $I = (\alpha\gamma, \beta\alpha - \gamma^2, \gamma^2\beta)$ .

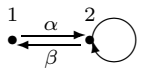
6. Legyen az  $A$  algebra reguláris modulusának Loewy-diagramja  $A_A = \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{smallmatrix}$ . Határozzuk meg az  $\text{Ext}^1(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & \\ & 2 \end{smallmatrix})$  vektortér dimenzióját! Keressünk olyan modulust, amelyet megkaphatunk az  $\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 2 \end{smallmatrix}$ -nek önmagával való nem felhasadó bővítéseként!

1. Tegyük fel, hogy  $e, f \in R$  idempotensek, és  $ef = 0$ . Bizonyítsuk be, hogy  $e + f - fe$  is idempotens, és  $eR$  direkt összeadandója  $(e + f - fe)R$ -nek.
2. Bizonyítsuk be, hogy a  $\prod_{p \text{ prím}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$  direkt szorzatnak van  $\mathbb{Q}$ -val izomorf részcsoportja. (Útmutatás: keressünk a direkt szorzatban végtelen rendű elemet.)

3. Legyen

$$\begin{array}{ccccccc} A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & & & \\ A' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

kommutatív diagram egzakt sorokkal. Bizonyítsuk be, van olyan  $\gamma : C \rightarrow C'$  homomorfizmus, amellyel a diagram kommutatív marad.

4. A  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_{12} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$  sorozat féligegzakt, és  $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ . Határozzuk meg a homológiákat.
5. Adjuk meg az  $A$  algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha  $A = K\Gamma/I$ , ahol  $\Gamma$ :   $\gamma$  és  $I = (\alpha\gamma, \beta\alpha - \gamma^2, \gamma^2\beta)$ .

6. Legyen az  $A$  algebra reguláris modulusának Loewy-diagramja  $A_A = \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{smallmatrix}$ . Határozzuk meg az  $\text{Ext}^1(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & \\ & 2 \end{smallmatrix})$  vektortér dimenzióját! Keressünk olyan modulust, amelyet megkaphatunk az  $\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 2 \end{smallmatrix}$ -nek önmagával való nem felhasadó bővítéseként!