**1.** Legyen $M \in \text{Mod-}R$, azaz $M$ jobb oldali $R$-modulus, $B$ balideálja, $J$ jobbideálja $R$-nek, $a \in M$ és $U, V$ részmodulusok $M$-ben. Az alábbiak közül melyikek lesznek feltétlenül részmodulusai $M$-nek? (Az összegek komplexusösszegeket, a szorzatok a komplexusszorzat elemeiből alkotott összegek hamazát jelentik, és $\mathrm{Ann}_M(H) = \{ m \in M \mid mh = 0\ \forall h \in H \}$ a $H \subseteq R$ részhalmaz annullátora $M$-ben.)

a) $aR$ b) $aB$ c) $aJ$ d) $U \cap V$ e) $U \cup V$
f) $U + V$ g) $\mathrm{Ann}_M(B)$ h) $\mathrm{Ann}_M(J)$ i) $UB$ j) $UJ$.

**2.** a) Legyen $1 \in S \leq R$. Bizonyítsuk be, hogy minden $R$-modulus $S$-modulus is, de fordítva nem igaz.
b) Legyen $I \lhd R$. Mi a kapcsolat az $R$-modulusok és az $R/I$-modulusok között?

**3.** Hány részmodulusa van az alábbi modulusoknak, és azok hány izomorfiaosztályba tartoznak?
a) $\mathbb{R}^4$ mint $\mathbb{R}$-modulus.
b) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$ mint $\mathbb{Z}$-modulus.
c) A 2-elemű test fölötti $3 \times 3$-as mátrixok gyűrűje, $\mathbb{F}_2^{3\times 3}$, önmaga fölött.

**4.** Legyen $A$ algebra a $K$ test fölött, és legyen $M$ modulus $A$ fölött.
a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\dim_K M < \infty$, akkor $M$ végesen generált mint modulus, de fordítva nem igaz a következtetés.
b) Lássuk be, hogy ha $\dim_K A < \infty$, és $M$ végesen generált modulus $A$ fölött, akkor $\dim_K M < \infty$.

**5.** Tekintsük a $K[x]$ polinomgyűrű fölötti $n$-dimenziós modulusokat, ahol $K$ test. A modulus egy bázisát rögzítve feleltessük meg a modulusnak azt a mátrixot, amely az $x$ hatását adja meg az adott bázisban.
a) Mikor lesz ez a modulus egyszerű?
b) Mit jelent a mátrixokra nézve az, hogy két modulus izomorf?
c) Megadhatjuk-e ezeket a modulusokat természetes módon véges dimenziós algebra ($K[x]$ alkalmas faktoralgebrája) fölötti modulusként is?
d) Írjuk le az összes 2-dimenziós modulust $\mathbb{C}[x]$ fölött izomorfia erejéig!

**6.** Az alább felsorolt modulusosztályok közül melyikekben bontható minden modulus ciklikusok, illetve egyszerűek direkt összegére? Ha az egész osztályra nem igaz, milyen részosztályra teljesül a felbonthatóság?
a) vektorterek
b) ferdetest fölötti modulusok
c) $\mathbb{Z}$-modulusok

**Hf1.** Legyenek $A$, $B$ és $C$ részmodulusok az $M$ modulusban, és tegyük föl, hogy $A \geq C$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$.

**Hf2.** Legyen $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ és $R = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$. Bizonyítsuk be, hogy $M$ jobbmodulus $R$ fölött (a természetes mátrixszorzással), és hogy $M$-nek egyetlen valódi részmodulusa van.