1. Legyen $A = K\Gamma/I$ az az algebra, amelynek reguláris jobbmodulusa $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$. Határozzuk meg az $\begin{smallmatrix}&1&\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$ modulus összes részmodulusát és az ezekkel vett faktorainak Loewy-diagramját!

2. Legyen $A_A = \begin{smallmatrix}&1&\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\end{smallmatrix}$ Hány dimenziós az A algebra fölött a $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix})$, illetve a $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\end{smallmatrix})$ vektortér?

3. A következők közül melyik definiál funktort a morfizmusokon való természetes hatással együtt?
a) $G \mapsto G'$ a csoportok kategóriájában;
b) $G \mapsto Z(G)$ a csoportok kategóriájában;
c) $A \mapsto t(A)$ az Abel-csoportok kategóriájában, ahol $t(A)$ az A torziórészcsoportja, azaz véges rendű elemeinek csoportja.

4. Bizonyítsuk be, hogy $M \in R$-Mod-ra $X \mapsto X \underset{R}{\otimes} M$ kovariáns funktor Mod-R-ből az Abel-csoportok kategóriájába.

5. Legyen A az a gráfalgebra, amelyre a reguláris modulus Loewy-diagramja

$$A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\\&2&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}.$$

Tekintsük a $0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\\&2&\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \to 1 \to 0$ sorozatot, ahol mindegyik morfizmus a legnagyobb rangú olyan homomorfizmus (azaz a képe vektortérként maximális dimenziós), ami a Loewy-diagramokban használt báziselemeket báziselemekbe vagy 0-ba viszi. Határozzuk meg a sorozat homológiáit!

Hf1. Legyen A a 2. feladat algebrája, és $M = \begin{smallmatrix}1&&2&\\&2&&1\end{smallmatrix}$, $N = \begin{smallmatrix}&1&\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$ modulusok A fölött (a ferdén egymás alatt levő számok vannak összekötve nyíllal). Határozzuk meg a $\mathrm{Hom}(M, N)$ és $\mathrm{Hom}(N, M)$ vektorterek dimenzióját, és a lehetséges nemnulla homomorfizmusok magjának Loewy-diagramját!

Hf2. Határozzuk meg az összes olyan α, β homomorfizmust, amelyre a $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2 \to 0$ sorozat féligegzakt, és adjuk meg minden esetben a homológiákat!