

1. Legyen $\xi : 0 \rightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \rightarrow 0$ sorozat mod- R -ben. Bizonyítsuk be, hogy a következő állítások ekvivalensek:
- (i) ξ egzakt, és $\text{Im } \alpha$ direkt összeadandó Y -ban (így $Y \cong X \oplus Z$);
 - (ii) ξ egzakt, és $\exists \alpha' : Y \rightarrow X$, hogy $\alpha\alpha' = \text{id}_X$;
 - (iii) ξ egzakt, és $\exists \beta' : Z \rightarrow Y$, hogy $\beta'\beta = \text{id}_Z$;
 - (iv) $\exists \alpha : Y \rightarrow X$ és $\beta' : Z \rightarrow Y$, hogy $\alpha\alpha' = \text{id}_X$, $\beta'\beta = \text{id}_Z$, $\alpha\beta = 0$, $\beta'\alpha' = 0$, és $\alpha'\alpha + \beta\beta' = \text{id}_Y$.
- Ilyenkor a ξ sorozatot *felhasadó* rövid egzakt sorozatnak hívjuk.
2. Legyen $M_\bullet : 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ egzakt sorozat, és $F : \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, -)$, $G : \text{Hom}(-, \mathbb{Z}_2)$ funktorok. Bizonyítsuk be, hogy $F_\bullet(M_\bullet)$ és $G_\bullet(M_\bullet)$ egyike sem egzakt. Melyik láncszemnél romlik el az egzaktság?
3. Legyen $0 \rightarrow V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_m \rightarrow 0$ vektorterek egzakt sorozata. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\sum_k \dim V_{2k} = \sum_k \dim V_{2k+1}$.
4. (3×3 -lemma) Tegyük fel, hogy az alábbi kommutatív diagram sorai egzaktak.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & X' & \rightarrow & Y' & \rightarrow & Z' \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & X'' & \rightarrow & Y'' & \rightarrow & Z'' \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

- a) Bizonyítsuk be, hogy ha a középső oszlop egzakt, akkor első oszlop akkor és csak akkor egzakt, ha a harmadik az.
- b) Mutassuk meg, hogy az első és utolsó oszlop egzaktságából együtt sem következik, hogy a középső oszlop egzakt.

5. Tekintsük az f_\bullet :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{1 \mapsto 4} & \mathbb{Z}_8 & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \dots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}_8 & \xrightarrow{1 \mapsto 2} & \mathbb{Z}_8 & \xrightarrow{1 \mapsto 4} & \mathbb{Z}_8 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \dots
 \end{array}$$

láncképezést, ahol a felső lánckomplexus X_\bullet , az alsó Y_\bullet , és a lefelé menő nyilak (f_\bullet) természetes beágyazások.

Határozzuk meg a $0_\bullet \rightarrow X_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} Y_\bullet \rightarrow \text{Coker } f_\bullet \rightarrow 0_\bullet$ rövid egzakt sorozathoz tartozó hosszú egzakt sorozatot!

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy egy $0 \rightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \rightarrow 0$ féligexakt sorozat akkor és csak akkor homotóp a csupa-0 sorozattal, ha felhasadó egzakt.

Hf2. Legyen $A_A = \frac{1}{2} \oplus \frac{2}{2}$, és tekintsük a

$$0 \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow 1 \frac{2}{2} \rightarrow \frac{2}{2} \rightarrow 0$$

egzakt sorozatot. Mutassuk meg, hogy a $\text{Hom}(-, \frac{1}{2})$ funktorral vett képe nem egzakt. (Útmutatás: mennyi $\dim_K \text{Hom}(M_i, \frac{1}{2})$ a szereplő M_i modulusokra?)