1. Tekintsük az $f_\bullet$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \to & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \cdot 4 & & \downarrow \cdot 4 & & \downarrow \cdot 4 & & \downarrow & & \\
\cdots & \to & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z}_{16} & \xrightarrow{\cdot 4} & \mathbb{Z}_8 & \longrightarrow & 0 & \to & \cdots
\end{array}
$$

láncleképezést, ahol a felső lánckomplexus $X_\bullet$, az alsó $Y_\bullet$.
Határozzuk meg a $0_\bullet \to X_\bullet \to Y_\bullet \to \operatorname{Coker} f_\bullet \to 0_\bullet$ rövid egzakt sorozathoz tartozó hosszú egzakt sorozatot!

2. Számítsuk ki az

a) $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus 3$ reguláris modulusú algebra fölötti $X = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$ és $Y = \begin{smallmatrix} 2 \end{smallmatrix}$ modulus projektív feloldását;

b) az $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$ reguláris modulusú algebra fölötti $\begin{smallmatrix} & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & \end{smallmatrix}$ modulus projektív feloldását;

c) a $\mathbb{Z}_2$ Abel-csoport injektív feloldását.

3. Számítsuk ki a 2.a) feladat X modulusára a csonkolt projektív feloldásnak a $\operatorname{Hom}(-, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix})$ kontravariáns funktornál vett képét, és a kapott komplexus kohomológiáinak dimenzióját!

4. (5-lemma) Tegyük fel, hogy a következő kommutatív diagram sorai egzaktak.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
A & \to & B & \to & C & \to & D & \to & E \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\
A' & \to & B' & \to & C' & \to & D' & \to & E'
\end{array}
$$

Mutassuk meg, hogy

a) ha α epimorfizmus, és β és δ monomorfizmusok, akkor γ monomorfizmus;

b) ha ε monomorfizmus, és β és δ epimorfizmusok, akkor γ epimorfizmus.

c) ha α, β, δ és ε izomorfizmusok, akkor γ is izomorfizmus.

Hf1. Bizonyítsuk be a komplexusok $0_\bullet \to X_\bullet \to Y_\bullet \to Z_\bullet \to 0_\bullet$ rövid egzakt sorozatához tartozó hosszú egzakt sorozatban az egzaktságot $\mathrm{H}_n(Y_\bullet)$-nál!

Hf2. Tekintsük az $f_\bullet$:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \to & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \rightarrowtail & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \rightarrowtail & \mathbb{Z}_4 & \to & \cdots \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow 0 & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow 0 & & \\
\cdots & \to & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \to & \cdots
\end{array}
$$

láncleképezést, ahol a felső lánckomplexus $X_\bullet$, az alsó $Y_\bullet$.
Határozzuk meg a $0_\bullet \to \operatorname{Ker} f_\bullet \to X_\bullet \to Y_\bullet \to 0_\bullet$ rövid egzakt sorozathoz tartozó hosszú egzakt sorozatot!