

1. A következő részfeladatok segítségével bizonyítsuk be, hogy $\text{Mod-}R$ -ben minden projektív modulus lapos!
 - a) Lássuk be, hogy a $-\otimes M$ funktor felcserélhető a direkt összeggel (a végtelen direkt összeggel is).
 - b) Bizonyítsuk be, hogy lapos modulusok tetszőleges direkt összege és direkt összeadandója is lapos.
 - c) Mutassuk meg, hogy az ${}_R R$ reguláris modulus lapos.
2. Bizonyítsuk be, hogy az Abel-csoportok kategóriájában nem laposak azok a csoportok, amelyek nem torziómentesek: mutassuk meg, hogy ha G -nek van p rendű eleme, valamely p -re, akkor a $\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}$ monomorfizmusnak a $-\otimes_{\mathbb{Z}} G$ funktornál vett képe nem monomorfizmus.
3. Számítsuk ki $\text{Ext}^n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ értékét minden n -re a derivált funktor definíciójából, illetve a $0 \rightarrow K \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ rövid egzakt sorozathoz rendelt hosszú egzakt sorozatból $\text{Mod-}\mathbb{Z}$ -ben!
4.
 - a) Legyen $0 \rightarrow K_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ egzakt, és P_0 projektív. Bizonyítsuk be, hogy $0 \rightarrow \text{Hom}(M, N) \rightarrow \text{Hom}(P_0, N) \rightarrow \text{Hom}(K_1, N) \rightarrow \text{Ext}^1(M, N) \rightarrow 0$ egzakt.
 - b) Legyen $0 \rightarrow K_{n-1} \rightarrow P_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ egzakt, és tegyük fel, hogy itt P_i projektív minden i -re. Bizonyítsuk be, hogy $\text{Ext}^n(M, N) \cong \text{Ext}^1(K_{n-1}, N)$.
5. Tegyük fel, hogy az A gráfalgebra reguláris modulusának Loewy-diagramja

$$A_A = \begin{array}{cccc} & 1 & & \\ & \oplus & & \\ & 2 & \oplus & 3 \\ 1 & \oplus & 3 & \oplus & 4 \\ & 1 & \oplus & 4 & \oplus & 1 \end{array}$$
 - a) Határozzuk meg $\text{Ext}_A^3(1, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix})$ dimenzióját.
 - b) Számoljuk ki $\dim \text{Ext}_A^3(1, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$ -et.
 - c) Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -re létezik $k > n$, hogy $\dim \text{Ext}_A^k(1, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \neq 0$.
- Hf1.** Bizonyítsuk be, hogy egy additív kovariáns funktor akkor és csak akkor visz minden rövid egzakt sorozatot jobbról egzaktba ($0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ egzakt $\Rightarrow F(X) \rightarrow F(Y) \rightarrow F(Z) \rightarrow 0$ egzakt), ha minden egzakt $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ sorozatra az $F(X) \rightarrow F(Y) \rightarrow F(Z) \rightarrow 0$ sorozat egzakt.
- Hf2.** Számítsuk ki $\text{Ext}^n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ értékét $\text{Mod-}\mathbb{Z}_4$ -ben minden n -re!