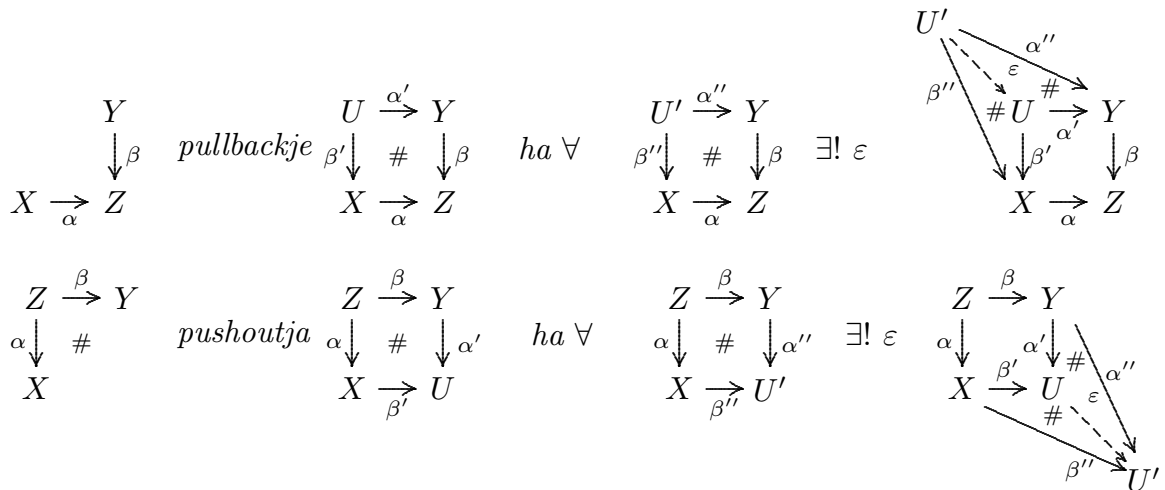


Egy kategóriában



1. Bizonyítsuk be, hogy a pullback és pushout — ha létezik — izomorfia erejéig egyértelmű, és hogy $\text{Mod-}R$ -ben mindig létezik pullback: $U = \{(x, y) \mid x\alpha = y\beta\} \leq X \oplus Y$ és pushout: $U = X \oplus Y / \{(z\alpha, -z\beta) \mid z \in Z\}$.
2. Bizonyítsuk be, hogy ha modulusok pullbackjében vagy pushoutjában α vagy β monomorfizmus, illetve epimorfizmus, akkor a vele “párhuzamos” nyíl is ilyen!
3. Határozzuk meg az $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$ csoportot! Adjuk meg az elemeinek megfelelő bővítéseket $\text{Ex}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$ -ben!
4. Legyen A véges dimenziós K -algebra, és $M, N \in \text{mod-}A$. Bizonyítsuk be, hogy ha a ξ és η bővítések lineárisan összefüggők, de egyik sem nulla $\text{Ex}(M, N)$ -ben (azaz nem felhasadók), akkor a középső tagjuk izomorf!
5. Tekintsük azt az A gráfalgebrát, amelynek jobbrekuláris modulusa $A_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az $\text{Ext}_A^1(1, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix})$ vektortér dimenzióját, és adjunk meg a vele izomorf $\text{Ex}_A(1, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix})$ térben egy bázist. Ciklikus lesz-e ez mint $\text{End}(1)$ -, illetve mint $\text{End}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix})$ -modulus?

Hf1. Bizonyítsuk be a 2. feladat állítását arra az esetre, amikor egy pullbackban, illetve pushoutban α epimorfizmus! (Használjuk az 1. feladatban megadott konstrukciókat!)

Hf2. Legyen

$$\xi : 0 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow 0$$

az a bővítés $\text{Ex}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$ -ben, amelynél a monomorfizmus az 1 elemet $(1, 2)$ -be képezi, az epimorfizmus pedig $(0, 1)$ -et 1-be, $(1, 0)$ -t pedig 2-be. Határozzuk meg az $f\xi$ és ξg bővítésekben a középső tagot, ha $f : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$ és $g : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ nemnulla homomorfizmusok!