Egy kategóriában

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "\beta"] \\
X \arrow[r, "\alpha"'] & Z
\end{tikzcd}
\quad \textit{pullbackje} \quad
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\
X \arrow[r, "\alpha"'] & Z
\end{tikzcd}
\quad \textit{ha } \forall \quad
\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, "\alpha''"] \arrow[d, "\beta''"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\
X \arrow[r, "\alpha"'] & Z
\end{tikzcd}
\quad \exists!\ \varepsilon \quad
\begin{tikzcd}
U' \arrow[dr, dashed, "\varepsilon"] \arrow[drr, bend left, "\alpha''"] \arrow[ddr, bend right, "\beta''"'] & & \\
 & U \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\
 & X \arrow[r, "\alpha"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \\
X &
\end{tikzcd}
\quad \textit{pushoutja} \quad
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\alpha'"] \\
X \arrow[r, "\beta'"'] & U
\end{tikzcd}
\quad \textit{ha } \forall \quad
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\alpha''"] \\
X \arrow[r, "\beta''"'] & U'
\end{tikzcd}
\quad \exists!\ \varepsilon \quad
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\alpha'"] \arrow[ddr, bend left, "\alpha''"] & \\
X \arrow[r, "\beta'"] \arrow[drr, bend right, "\beta''"'] & U \arrow[dr, dashed, "\varepsilon"] & \\
 & & U'
\end{tikzcd}
$$

1. Bizonyítsuk be, hogy a pullback és pushout — ha létezik — izomorfia erejéig egyértelmű, és hogy Mod-R-ben mindig létezik pullback: $U = \{(x,y) \mid x\alpha = y\beta\} \le X \oplus Y$ és pushout: $U = X \oplus Y / \{(z\alpha, -z\beta) \mid z \in Z\}$.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha modulusok pullbackjében vagy pushoutjában α vagy β monomorfizmus, illetve epimorfizmus, akkor a vele "párhuzamos" nyíl is ilyen!

3. Határozzuk meg az $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$ csoportot! Adjuk meg az elemeinek megfelelő bővítéseket $\mathrm{Ex}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$-ben!

4. Legyen A véges dimenziós K-algebra, és $M, N \in$ mod-A. Bizonyítsuk be, hogy ha a ξ és η bővítések lineárisan összefüggők, de egyik sem nulla $\mathrm{Ex}(M,N)$-ben (azaz nem felhasadók), akkor a középső tagjuk izomorf!

5. Tekintsük azt az A gráfalgebrát, amelynek jobbreguláris modulusa $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$.
Határozzuk meg az $\mathrm{Ext}^1_A(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix})$ vektortér dimenzióját, és adjunk meg a vele izomorf $\mathrm{Ex}_A(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix})$ térben egy bázist. Ciklikus lesz-e ez mint $\mathrm{End}(\,{\scriptstyle 1}\,)$-, illetve mint $\mathrm{End}(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix})$-modulus?

Hf1. Bizonyítsuk be a 2. feladat állítását arra az esetre, amikor egy pullbackban, illetve pushoutban α epimorfizmus! (Használjuk az 1. feladatban megadott konstrukciókat!)

Hf2. Legyen

$$\xi : \quad 0 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_4 \to 0$$

az a bővítés $\mathrm{Ex}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$-ben, amelynél a monomorfizmus az 1 elemet $(1,2)$-be képezi, az epimorfizmus pedig $(0,1)$-et 1-be, $(1,0)$-t pedig 2-be. Határozzuk meg az $f\xi$ és ξg bővítésekben a középső tagot, ha $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ és $g : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$ nemnulla homomorfizmusok!