1. *Lássuk be, hogy*

a) ha ${}_SX_R$ és ${}_TY_R$ bimodulusok, akkor $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ *egy* $T-S$*-bimodulus,*

b) és ha ${}_RX_S$ és ${}_RY_T$ bimodulusok, akkor $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ *egy* $S-T$*-bimodulus.*

Megoldás: a) Legyenek $\varphi,\psi\in\mathrm{Hom}_R(X,Y)$. Definiáljuk az S-szorzást az $x(\varphi s):=(sx)\varphi$, a T-szorzást pedig az $y(t\varphi):=t(y\varphi)$ szabállyal. A φs és $t\varphi$ leképezések is R-homomorfizmusok:

$$(x+x')(\varphi s)=(s(x+x'))\varphi=(sx+sx')\varphi=(sx)\varphi+(sx')\varphi=x(\varphi s)+x'(\varphi s),$$

$$(xr)(\varphi s)=(s(xr))\varphi=((sx)r)\varphi=((sx)\varphi)r=(x(\varphi s))r,$$
$$(x+x')(t\varphi)=t((x+x')\varphi)=t(x\varphi+x'\varphi)=t(x\varphi)+t(x'\varphi)=x(t\varphi)+x'(t\varphi),$$
$$(xr)(t\varphi)=t((xr)\varphi)=t((x\varphi)r)=(t(x\varphi))r=(x(t\varphi))r.$$

Belátjuk még, hogy ezzel a definícióval $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ T-S-bimodulus. Az összeadással kapcsolatos axiómák teljesülése nyilvánvaló, mert a definícióban minden felcserélhető az összeadással, és az 1 is nyilván identitásként hat, ezért itt már csak a szorzásról szóló modulusaxiómákat ellenőrizzük.

$$x(\varphi(ss'))=((ss')x)\varphi=(s(s'x))\varphi=(s'x)(\varphi s)=x((\varphi s)s'),$$

$$x((tt')\varphi)=(tt')(x\varphi)=t(t'(x\varphi))=t(x(t'\varphi))=x(t(t'\varphi)),$$
$$x(t(\varphi s))=t(x(\varphi s))=t((sx)\varphi)=(sx)(t\varphi)=x((t\varphi)s)).$$

b) Legyenek $\varphi,\psi\in\mathrm{Hom}_R(X,Y)$. Definiáljuk az S-szorzást az $x(s\varphi):=(xs)\varphi$, a T-szorzást pedig az $y(\varphi t):=(y\varphi)t$ szabállyal. Az $s\varphi$ és φt leképezések is R-homomorfizmusok:

$$(x+x')(s\varphi)=((x+x')s)\varphi=(xs+x's)\varphi=(xs)\varphi+(x's)\varphi=x(s\varphi)+x'(s\varphi),$$

$$(rx)(s\varphi)=((rx)s)\varphi=(r(xs))\varphi=r((xs)\varphi)=r(x(s\varphi)),$$
$$(x+x')(\varphi t)=((x+x')\varphi)t=(x\varphi+x'\varphi)t=(x\varphi)t+(x'\varphi)t=x(\varphi t)+x'(\varphi t),$$
$$(rx)(\varphi t)=((rx)\varphi)t=(r(x\varphi))t=r((x\varphi)t)=r(x(\varphi t)).$$

Belátjuk még, hogy ezzel a definícióval $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ S-T-bimodulus. Itt is csak a szorzásról szóló axiómákat ellenőrizzük.

$$x((ss')\varphi)=(x(ss'))\varphi=((xs)s')\varphi=(xs)(s'\varphi)=x(s(s'\varphi)),$$

$$x(\varphi(tt'))=(x\varphi)(tt')=((x\varphi)t)t'=(x(\varphi t))t'=x((\varphi t)t'),$$
$$x((s\varphi)t)=(x(s\varphi))t=((xs)\varphi)t=(xs)(\varphi t)=x(s(\varphi t)).$$

2. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\mathrm{Hom}_R(\oplus M_i,N)\cong\prod\mathrm{Hom}_R(M_i,N)$$
$$\mathrm{Hom}_R(M,\prod N_i)\cong\prod\mathrm{Hom}_R(M,N_i).$$

Megoldás: Legyen ι_i az M_i természetes beágyazása $\oplus M_i$-be. Ekkor a ι_i-vel való balszorzás homomorfizmus $\mathrm{Hom}_R(\oplus M_i,N)$-ből $\mathrm{Hom}_R(M_i,N)$-be minden i-re. A modulusok direkt szorzatának definíciója szerint van olyan $\Phi : \mathrm{Hom}_R(\oplus M_i, N) \to \Pi \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$ homomorfizmus, hogy minden $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(\oplus M_i, N)$-re $\varphi\Phi = (\ldots, \iota_i\varphi, \ldots)$ (ld. az bal oldali ábrát).

$$\begin{tikzcd}
\prod \mathrm{Hom}_R(M_i, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M_i, N) \\
\mathrm{Hom}_R(\oplus M_i, N) \arrow[u, dashed, "\Phi"] \arrow[ur, "\iota_i\cdot"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\oplus M_i \arrow[d, dashed, "\varepsilon"'] & M_i \arrow[l, "\iota_i"'] \arrow[dl, "\varphi_i"] \\
N
\end{tikzcd}$$

Ez a homomorfizmus szürjektív, ugyanis tetszőleges $(\ldots, \varphi_i, \ldots) \in \Pi \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$-re a jobb oldali ábra szerint $\varepsilon : \oplus M_i \to N$, $\sum m_i \mapsto \sum m_i\varphi_i$ homomorfizmus, amelyre $\varphi_i = \iota_i\varepsilon$ minden i-re, azaz $(\ldots, \varphi_i, \ldots) = (\ldots, \iota_i\varepsilon, \ldots) = \varepsilon\Phi$. Másrészt Φ injektív is, mert ha valamely $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(\oplus M_i, N)$-re $\varphi\Phi = 0$, akkor $\iota_i\varphi = 0$ minden i-re, vagyis $\varphi = 0$ a $\oplus M_i$ mindegyik komponensén, és így az egész direkt összegen is. Tehát a megadott Φ leképezés izomorfizmus.

A második izomorfiához tekintsük az alábbi ábrát.

$$\begin{tikzcd}
\prod \mathrm{Hom}_R(M, N_i) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M, N_i) \\
\mathrm{Hom}_R(M, \prod N_i) \arrow[u, dashed, "\Phi"] \arrow[ur, "\cdot\pi_i"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\prod N_i \arrow[r, "\pi_i"] & N_i \\
M \arrow[u, dashed, "\varepsilon"] \arrow[ur, "\varphi_i"']
\end{tikzcd}$$

Itt $\varphi\Phi = (\ldots, \varphi\pi_i, \ldots)$. Ez a Φ is szürjektív, mert tetszőleges $(\ldots, \varphi_i, \ldots) \in \Pi \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$-re a jobb oldali ábra szerint $\varepsilon : M \to \prod N_i$, $m \mapsto (\ldots, m\varphi_i, \ldots)$ homomorfizmus, amelyre $\varphi_i = \varepsilon\pi_i$ minden i-re, azaz $(\ldots, \varphi_i, \ldots) = (\ldots, \varepsilon\pi_i, \ldots) = \varepsilon\Phi$. Másrészt Φ injektív is, mert ha valamely $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, \prod N_i)$-re $\varphi\Phi = 0$, akkor minden $m \in M$-re és i-re $m\varphi\pi_i = 0$, azaz $m\varphi = 0$, így $\varphi = 0$. Tehát a megadott Φ leképezés izomorfizmus.

3. *Bizonyítsuk be hogy* $\mathrm{End}(R_R) \cong R$ *mint gyűrűk, ha az endomorfizmusokat balról írjuk!*

Megoldás: Definiáljuk minden $r \in R$-re a $\varphi_r \in \mathrm{End}(R_R)$ endomorfizmust az r-rel való balszorzásként. Ez valóban jobbmodulus-homomorfizmus:

$$\varphi_r(x + y) = r(x + y) = rx + ry = \varphi_r x + \varphi_r y,$$

$$\varphi_r(xr') = r(xr') = (rx)r' = (\varphi_r x) \cdot r'.$$

Továbbá az $\varepsilon : R \to \mathrm{End}(R_R)$, $r \mapsto \varphi_r$ leképezés gyűrűhomomorfizmus, ugyanis

$$\varphi_{r+r'}x = (r + r')x = rx + r'x = \varphi_r x + \varphi_{r'}x \text{ miatt } \varphi_{r+r'} = \varphi_r + \varphi_{r'}, \text{ és}$$

$$\varphi_{rr'}x = (rr')x = r(r'x) = \varphi_r(r'x) = \varphi_r(\varphi_{r'}x) \text{ miatt } \varphi_{rr'} = \varphi_r\varphi_{r'}.$$

ε injektív, mert $\varphi_r = \varphi_{r'}$ esetén $r = \varphi_r 1 = \varphi_{r'} 1 = r'$, és szürjektív, mert ha $\varphi \in \mathrm{End}(R_R)$, és $\varphi 1 = r$, akkor $\varphi x = \varphi(1 \cdot x) = (\varphi 1) \cdot x = rx = \varphi_r x$ minden x-re, így $\varphi = \varphi_r$. Tehát ε gyűrűizomorfizmus.

4. *Számítsuk ki a következő tenzorszorzatokat:*

$$\mathbb{Z}_2 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}_3, \qquad \mathbb{Z}_2 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}_4, \qquad \mathbb{Z}_2 \underset{\mathbb{Z}_4}{\otimes} \mathbb{Z}_4, \qquad M \underset{R}{\otimes} R/I, \text{ ahol } M \in \text{Mod-}R,\ I \triangleleft R.$$

Megoldás: $a \otimes b = a \otimes 4b = a4 \otimes b = 0 \otimes b = 0$ minden generátorelemre, így $\mathbb{Z}_2 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}_3 = 0$.

$\mathbb{Z}_2 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}_4$-ben minden elem $m \otimes 1$ alakban írható, ugyanis $a \otimes (2k) = (a \cdot 2) \otimes k = 0 \otimes k = 0 = 0 \otimes 1$, és $a \otimes (2k+1) = a \otimes (2k) + a \otimes 1 = a \otimes 1$, továbbá $a \otimes 1 + b \otimes 1 = (a+b) \otimes 1$, tehát a generált részcsoport is csak ilyen elemekből áll. Így $\mathbb{Z}_2 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}_4$ legföljebb 2 elemű. Másrészt a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$, $(a,b) \mapsto ab$ leképezés $\mathbb{Z}$-középlineáris és szürjektív, így ez átvezethető a tenzorszorzaton, vagyis a tenzorszorzatnak is homomorf képe a $\mathbb{Z}_2$. Következésképpen $\mathbb{Z}_2 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2$.

$\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}$-modulus, és annullálja a $4\mathbb{Z}$, így $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_4$ fölött is modulus, tehát értelmes a $\mathbb{Z}_2 \underset{\mathbb{Z}_4}{\otimes} \mathbb{Z}_4$ tenzorszorzat. Másrészt láttuk az előadáson, hogy $M \in$ mod-R-re $M \underset{R}{\otimes} R \cong M$ mint Abel-csoport, tehát $\mathbb{Z}_2 \underset{\mathbb{Z}_4}{\otimes} \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2$. (De az előző tenzorszorzat bizonyítása is átvihető erre.)

Legyen R/I-ben az $\overline{r} := r + I$. $M \underset{R}{\otimes} R/I$-ben minden elem $m \otimes \overline{1}$ alakú, ugyanis a tenzorszorzat generátorelemei $m \otimes \overline{r} = m \otimes (r \cdot \overline{1}) = mr \otimes \overline{1}$, és ezek generátuma is ilyen alakú elemekből áll. Másrészt $a \in I$-re $ma \otimes \overline{1} = m \otimes a\overline{1} = m \otimes \overline{a} = m \otimes \overline{0} = 0$, tehát M-ben az MI részmodulus mellékosztályainak elemeihez ugyanaz az $m \otimes \overline{1}$ tartozik a tenzorszorzatban. Belátjuk, hogy

$$M \underset{R}{\otimes} R/I \cong M/MI.$$

A $\varphi : M \times R/I \to M/MI$, $(m, \overline{r}) \mapsto \overline{mr}$ leképezés jól definiált, mert $a \in I$-re $\overline{m(r+a)} = \overline{mr + ma} = \overline{mr}$, és nyilván R-középlineáris, ezért átvezethető a tenzorszorzaton egy ψ homomorfizmussal:

$$\begin{tikzcd} M \times R/I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \underset{R}{\otimes} R/I \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ M/MI & \end{tikzcd}$$

φ szürjektív, ezért ψ is az. Azt kell még belátnunk, hogy ψ injektív is.

A tenzorszorzat tetszőleges eleme a korábbiak szerint $m \otimes \overline{1}$ alakú, és ha ez benne van ψ magjában, akkor $0 = (m \otimes \overline{1})\psi = (m, \overline{1})\alpha\psi = (m, \overline{1})\varphi = \overline{m\overline{1}} = \overline{m} \Rightarrow m \in MI$, és láttuk, hogy ekkor $m \otimes \overline{1} = 0$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $M \underset{R}{\otimes} R/I \cong M/MI$ mint Abel-csoport.

R/I-t tekinthetjük R-R/I-bimodulusnak, és akkor az 5. feladat alapján az előbbi ψ jobb R/I-homomorfizmus is lesz, így $M \underset{R}{\otimes} R/I$ R/I-modulusként is izomorf M/MI-vel. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy M/MI az M-hez "legközelebbi" R/I-modulus.

5. *Legyenek ${}_SM_R$ és ${}_RN_T$ bimodulusok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $M \underset{R}{\otimes} N$ egy S-T-bimodulus az $s(m \otimes n) := sm \otimes n$ és $(m \otimes n)t := m \otimes nt$ hatások kiterjesztésével.*

Megoldás: A bizonyítás lényeges része az, hogy belássuk, hogy az s-sel, illetve t-vel való szorzás jól definiált Abel-csoporthomomorfizmus, a többi bimodulus-axióma már simán következik a hatás fenti definíciójából. Elég az egyiket, mondjuk, a T hatását nézni. Tetszőleges $t \in T$-re vegyük a $\varphi : M \times N \to M \underset{R}{\otimes} N$, $(m,n) \mapsto m \otimes nt$ leképezést. Ez R-középlineáris:

$(m + m', n)\varphi = (m + m') \otimes nt = m \otimes nt + m' \otimes nt = (m,n)\varphi + (m', n)\varphi$,

$(m, n + n')\varphi = m \otimes (n + n')t = m \otimes (nt + n't) = m \otimes nt + m \otimes n't = (m,n)\varphi + (m,n')\varphi$, és

$(mr, n)\varphi = mr \otimes nt = m \otimes r(nt) = m \otimes (rn)t = (m, rn)\varphi$,

ahol felhasználtuk az N bimodulus-tulajdonságait, és a tenzorszorzatbeli számolási szabályokat. Ezért φ átvezethető a tenzorszorzaton egy ψ leképezéssel, és ψ éppen a feladatban megadott szorzási szabályt adja, és terjeszti ki.

6. *Legyenek $S \leq R$ gyűrűk, $M \in \text{Mod-}S$, $U_R = M \underset{S}{\otimes} R$, és $\alpha \in \text{Hom}_S(M, U)$, $\alpha : m \mapsto m \otimes 1$. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $V \in \text{Mod-}R$-re bármely $\beta \in \text{Hom}_S(M, V)$ homomorfizmus átvezethető az U-n, azaz van olyan $\varphi \in \text{Hom}_R(U, V)$, hogy $\beta = \alpha\varphi$.*

Megoldás:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d, "\alpha"] \\
M \times R \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f"'] & U = M \underset{S}{\otimes} R \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
V &
\end{tikzcd}$$

Legyen $\varepsilon : M \times R \to U = M \underset{S}{\otimes} R$ a természetes $(m, r) \mapsto m \otimes r$ leképezés, és $f : M \times R \to V$, $(m, r) \mapsto (m\beta)r$. Ekkor f S-középlineáris:

$$\begin{aligned}
(m + m', r)f =& ((m + m')\beta)r = (m\beta + m'\beta)r = (m\beta)r + (m'\beta)r = (m, r)f + (m', r)f \\
(m, r + r')f =& (m\beta)(r + r') = (m\beta)r + (m\beta)r' = (m, r)f + (m, r')f \\
(ms, r)f =& ((ms)\beta)r = ((m\beta)s)r = (m\beta)(sr) = (m, sr)f,
\end{aligned}$$

így f keresztülvezethető a tenzorszorzaton: van olyan $\varphi : U \to V$ Abel-csoporthomomorfizmus, amelyre $f = \varepsilon\varphi$. Ez a φ R-homomorfizmus is lesz az U-nak az 5. feladat szerinti jobb R-modulus struktúrájára nézve:
$((m \otimes r)r')\varphi = (m \otimes rr')\varphi = (m, rr')\varepsilon\varphi = (m, rr')f = (m\beta)(rr') = ((m\beta)r)r' = ((m, r)f)r' = ((m, r)\varepsilon\varphi)r' = ((m \otimes r)\varphi)r'$, és így
$((\sum m_i \otimes r_i)r')\varphi = ((\sum m_i \otimes r_i)\varphi)r'$ is igaz, mivel φ Abel-csoporthomomorfizmus.
Végül $\alpha\varphi = \beta$, ugyanis $m\alpha\varphi = (m \otimes 1)\varphi = (m, 1)\varepsilon\varphi = (m, 1)f = (m\beta)1 = m\beta$ minden $m \in M$-re.

Hf1. *Legyen K test és $R = K^{n \times n}$ a K fölötti $n \times n$-es mátrixok algebrája. Bizonyítsuk be, hogy a $H := \text{Hom}_K(R, K)$ vektortér egyúttal R-R-bimodulus (felhasználhatjuk az 1. feladat állításait is), továbbá, ha τ a mátrixokhoz a nyomukat rendelő leképezés, akkor $\tau \in H$, és $a\tau = \tau a$ minden $a \in R$-re!*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$ mint (additív) Abel-csoport.*