Homologikus algebra **3. feladatsor** *2021 ősz*

1. *Bizonyítsuk be, hogy a kategóriaelméleti szorzat és koszorzat izomorfizmus erejéig egyértelmű!*

M szorzat:
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi_i"] & M_i \\ \forall U \arrow[u, dashed, "\exists!\varphi"] \arrow[ur, "\alpha_i"'] & \end{tikzcd}$$

N koszorzat:
$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"'] & M_i \arrow[l, "\iota_i"'] \arrow[dl, "\alpha_i"] \\ \forall U & \end{tikzcd}$$

Megoldás: Ha M és M' is szorzata az M_i modulusoknak (π_i és π_i' morfizmusokkal), akkor a diagram szerint van $\varphi : M' \to M$ és $\psi : M \to M'$, amelyekre $\varphi\pi_i = \pi_i'$ és $\psi\pi_i' = \pi_i$ minden i-re. De akkor M-et téve U helyébe is a fönti diagramban (és π_i-t α_i helyére), a diagramot $\psi\varphi$-vel és id_M-mel is kommutatívvá lehet tenni. Az egyértelműség miatt ebből $\psi\varphi = id_M$ következik, és ugyanígy jön ki, hogy $\varphi\psi = id_{M'}$, tehát $M \cong M'$.

A koszorzatra ugyanez működik, csak fordított irányú morfizmusokkal. Ha N és N' is koszorzata az M_i-knek ι_i és ι_i' morfizmusokkal, akkor van olyan $\varphi : N \to N'$ és $\psi : N' \to N$, amelyekre $\iota_i' = \iota_i\varphi$ és $\iota_i = \iota_i'\psi$, amiből $\iota_i = \iota_i\varphi\psi$. Tehát ha U helyébe is N-et és α_i-k helyébe ι_i-ket írunk, akkor $\varphi\psi$ és id_N is kommutatívvá teszi a diagramot, ezért $\varphi\psi = \mathrm{id}_N$, és a diagramot két N'-vel felrajzolva azt kapjuk, hogy $\psi\varphi = \mathrm{id}_{N'}$. Tehát $N \cong N'$.

2. *Bizonyítsuk be, hogy az U_i modulusok kategóriaelméleti szorzata $\prod U_i$, koszorzata pedig $\oplus U_i$.*

Megoldás: Legyen $M = \prod\limits_{i\in I} M_i$ direkt szorzat, π_i az i. komponensre való vetítés, U pedig egy tetszőleges modulus, $\alpha_i : U \to M_i$ homomorfizmusokkal. Ekkor a $\varphi : U \to M$, $u\varphi = (\dots, u\alpha_i, \dots)$ leképezés modulus-homomorfizmus, és $\varphi\pi_i = \alpha_i$. Továbbá, φ egyértelmű is, mivel $(u\varphi)\pi_i = u\alpha_i$-nek kell teljesülnie, vagyis $u\varphi$ i. komponense csak $u\alpha_i$ lehet.

Legyen $N = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, ι_i az M_i-nek az N-be való természetes beágyazása, U pedig egy tetszőleges modulus, $\alpha_i : M_i \to U$ homomorfizmusokkal. Ekkor a $\varphi : N \to U$, $(\dots, m_i, \dots)\varphi = \sum\limits_{i\in I} m_i\alpha_i$ értelmes, mert az m_i-k közül csak véges sok nem 0, és nyilvánvalóan művelettartó, továbbá $\iota_i\varphi = \alpha_i$ minden i-re. Itt is egyértelmű a φ homomorfizmus, ugyanis az m_i-k képe a diagram kommutativitása miatt adva van, és ezek már kigenerálják a teljes direkt összeget.

3. *Mi a $\mathbb{Z}$ önmagával vett koszorzata, ha az Abel-csoportok, illetve a csoportok kategóriájában nézzük? És $\mathbb{Z}_2$ önmagával vett koszorzata?*

Megoldás: Az Abel-csoportok kategóriájában az 1. feladat szerint $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. A csoportok kategóriájában inkább multiplikatív műveletet szoktunk használni, így $\mathbb{Z}$ helyett vegyük a C_∞ csoportot. Itt a 2 elemmel generált szabad csoport lesz a koszorzat. Legyen ugyanis az F csoport az x, y elemekkel szabadon generált csoport. $M_1 =< x >$, és $M_2 =< y >$ mindketten végtelen ciklikus csoportok, és a természetes beágyazásuk F-be a ι_1 és ι_2. Tetszőleges U csoportra és $\alpha_i : M_i \to U$ homomorfizmusokra van olyan egyértelmű $\varphi : F \to U$ homomorfizmus, ami a szabad generátorokon megadott $x \mapsto x\alpha_1$ és $y \mapsto y\alpha_2$ leképezést kiterjeszti. Mivel $\iota_i\varphi = \alpha_i$ teljesül az M_i generátorelemén, x-en, illetve y-on, a teljes M_i csoporton is teljesül $i = 1, 2$-re. Vagyis F valóban a végtelen ciklikus csoport koszorzata önmagával.

$\mathbb{Z}_2$ koszorzata önmagával az Abel-csoportok kategóriájában nyilván $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, azaz a Klein-csoport, a csoportok kategóriájában pedig két másodrendű ciklikus csoport szabad szorzata, azaz az $U = \langle\, x_1, x_2 \,|\, x_1^2 = x_2^2 = 1 \,\rangle$ definiáló relációkkal megadott csoport (mellesleg ez izomorf azzal a csoporttal, amit a síkon két olyan origón átmenő egyenesre való tükrözés generál a sík egybevágóság-csoportjában, amelyeknek a szöge 2π-nek egy irracionális többszöröse). Valóban, itt a természetes morfizmusok a két másodrendű csoportból $\alpha_i : \langle a_i \rangle \to U$, $a_i \mapsto \overline{x}_i$, és ha adva van $\langle a_i \rangle \to G$, ahol $a_i\beta = g_i$, akkor $g_i^2 = 1$ $(i = 1, 2)$, és így van $\varphi : U \to G$, amelyre $\overline{x}_i\varphi = g_i$, tehát $a_i\alpha\varphi = \overline{x}_i\varphi = g_i = a_i\beta_i$, és így $\alpha_i\varphi = \beta_i$ $i = 1, 2$-re.

4. *Bizonyítsuk be, hogy*
- *a) ha α és β epimorfizmus, akkor $\alpha\beta$ is az;*
- *b) ha α és β monomorfizmus, akkor $\alpha\beta$ is az;*
- *c) ha $\alpha\beta$ epimorfizmus, akkor β is az;*
- *d) ha $\alpha\beta$ monomorfizmus, akkor α is az!*

Megoldás: a) $(\alpha\beta)\gamma = (\alpha\beta)\delta \Rightarrow \alpha(\beta\gamma) = \alpha(\beta\delta)$, és α epi. $\Rightarrow \beta\gamma = \beta\delta$, és β epi. $\Rightarrow$ $\gamma = \delta$.
b) $\gamma(\alpha\beta) = \delta(\alpha\beta) \Rightarrow (\gamma\alpha)\beta = (\delta\alpha)\beta$, és β mono. $\Rightarrow \gamma\alpha = \delta\alpha$, és α mono. $\Rightarrow \gamma = \delta$.
c) $\beta\gamma = \beta\delta \Rightarrow \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\delta$, és $\alpha\beta$ epi. $\Rightarrow \gamma = \delta$.
d) $\gamma\alpha = \delta\alpha \Rightarrow \gamma\alpha\beta = \delta\alpha\beta$, és $\alpha\beta$ mono. $\Rightarrow \gamma = \delta$.

5. *Legyen $\mathcal{K}$ az a kategória, amelynek egyetlen a objektuma van, és $S = \mathrm{Hom}(a, a)$ egy véges, egységelemes félcsoport, amelyben $1 := \mathrm{id}_a$. Melyek lesznek $\mathrm{Hom}(a, a)$-ban az epimorfizmusok és a monomorfizmusok?*

Megoldás: Egy $b \in S$ elem akkor és csak akkor epimorfizmus, ha balról egyszerűsíteni lehet vele, azaz ha $bx = by \Rightarrow x = y$. Ez viszont azt jelenti, hogy a b-vel való balról szorzás injektív leképezés S-ből S-be. Mivel feltettük, hogy S véges, ebből a leképezés szürjektivitása is következik, ezért a leképezés permutációként hat S-en, következésképpen valamilyen $n > 0$-ra $b^n = 1$, és így b invertálható. Ugyanígy kijön, hogy ha b monomorfizmus, akkor b invertálható (csak ott a jobbról szorzás injektivitását használjuk). Fordítva, minden invertálható elemmel egyszerűsíteni lehet (bármelyik oldalról): $bx = by \Rightarrow$ $x = b^{-1}bx = b^{-1}by = y$, és ugyanígy a jobb oldalon, így ezek epimorfizmusok és monomorfizmusok is. Összefoglalva: $b \in S$-re ekvivalens, hogy
- (i) b epimorfizmus;
- (ii) b monomorfizmus;
- (iii) b invertálható;
- (iv) $\exists n > 0$ $b^n = 1$.

6. *Bizonyítsuk be, hogy projektív modulusok direkt összege projektív, és injektív modulusok direkt szorzata injektív! (Használjuk a kategóriaelméleti koszorzat és szorzat fogalmát!)*

Megoldás: Legyenek M_i-k projektívek, $\alpha : X \to Y$ epimorfizmus, és $\beta : \oplus M_i \to Y$. Ekkor M_i projektivitásából következik, hogy van olyan $\psi_i : M_i \to X$, amelyre $\psi_i\alpha = \iota_i\beta$ minden i-re. Ekkor viszont a koszorzat definíciója miatt van olyan $\varepsilon : \oplus M_i \to X$, amelyre $\psi_i = \iota_i\varepsilon$ minden i-re. Következésképpen $\iota_i\beta = \psi_i\alpha = \iota_i\varepsilon\alpha$, így a direkt összeg (koszorzat) definíciójában az egyértelműségből következik, hogy $\beta = \varepsilon\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
 & M_i \arrow[d, "\iota_i"] \arrow[ddl, dashed, "\psi_i"'] \\
 & \oplus M_i \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, dashed, "\varepsilon"] \\
X \arrow[r, two heads, "\alpha"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \arrow[dl, dashed, "\varepsilon"'] \arrow[ddl, dashed, "\psi_i"] \\
\prod M_i \arrow[d, "\pi_i"'] & \\
M_i &
\end{tikzcd}$$

Most legyenek M_i-k injektív modulusok, $\alpha : X \to Y$ monomorfizmus, és $\beta : X \to \prod M_i$. Ekkor az M_i injektivitása miatt van olyan $\psi_i : Y \to M_i$ homomorfizmus minden i-re, amelyre $\alpha\psi_i = \beta\pi_i$. Most a kategóriaelméleti szorzat definíciójából következik, hogy van olyan $\varepsilon : Y \to \prod M_i$, amelyre $\varepsilon\pi_i = \psi_i$ minden i-re. Következésképpen $\alpha\varepsilon\pi_i = \alpha\psi_i = \beta\pi_i$ minden i-re. Így a kategóriaelméleti szorzat definíciójában az egyértelműségből következik, hogy $\alpha\varepsilon = \beta$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}$ mint Abel-csoport nem projektív.*

Megoldás: Szabad Abel-csoportnak, azaz $\mathbb{Z}$-k direkt összegének semelyik nem nulla eleme nem korlátlanul osztható, mert $\mathbb{Z}$-ben $0 \neq n$ nem osztható $2n$-nel. Így projektív Abel-csoportban sincs korlátlanul osztható nem 0 elem, $\mathbb{Q}$ viszont osztható csoport.

8. *Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}_n$ injektív mint önmaga fölötti modulus (használhatjuk a Baer-kritériumot)!*

Megoldás: $\mathbb{Z}_n$ részmodulusai az n osztói által generált ciklikus modulusok, azaz $k\mathbb{Z}_n$, ahol $k \mid n$ (ugyanis ha k az I ideál legkisebb pozitív eleme, akkor az $n = kq + r$ maradékos osztásból következik, hogy $r \in I$, tehát $0 \leq r < k$ miatt $r = 0$, azaz $k|n$, és tetszőleges $a \in I$ elemre az $a = kq_1 + r_1$ maradékos osztásból $r_1 = 0$ következik, így k generálja I-t). Tehát a Baer-kritérium miatt elég a következő típusú diagramokkal foglalkozni.

$$
\begin{tikzcd}
k\mathbb{Z}_n \arrow[r, tail, "\iota"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathbb{Z}_n \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"] \\
\mathbb{Z}_n &
\end{tikzcd}
$$

ahol ι a természetes beágyazás: $k\iota = k$. Legyen $k\alpha = a \in \mathbb{Z}_n$. Ekkor $a\frac{n}{k} = k\alpha\frac{n}{k} = (k\frac{n}{k})\alpha = 0\alpha = 0$, ezért $k \mid a$, és így van olyan $b \in \mathbb{Z}_n$, amelyre $a = kb$. Mivel $\mathbb{Z}_n$ szabad modulus önmaga fölött, létezik olyan γ homomorfizmus, amelyre $1\gamma = b$, és így $k\iota\gamma = k\gamma = (1k)\gamma = (1\gamma)k = bk = a = k\alpha$. Tehát $\iota\gamma = \alpha$ a generátorelemen, és így az egész $k\mathbb{Z}_n$-en is.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy az egységelemes gyűrűk kategóriájában a $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ beágyazás epimorfizmus, bár nem szürjektív!*

Hf2. *Legyen $\mathcal{K}$ az a kategória, amelynek egyetlen objektuma a, és $\mathrm{Hom}(a, a) = S$ egységelemes félcsoport. Injektív objektum-e az a, ha*

a) S csoport;
b) $S = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots\} \cong (\mathbb{Z}_{\geq 0}, +)$;
c) $S = \{1, \alpha, \alpha^2\}$ háromelemű félcsoport, ahol $\alpha^3 = \alpha^2$.