1. *Legyen R nem feltétlenül egységelemes gyűrű, és tegyük fel, hogy az $I \lhd R$ ideál mint gyűrű egységelemes. Bizonyítsuk be, hogy ekkor I az R-nek mint gyűrűnek direkt összeadandója!*

Megoldás: e egységelem az I-ben $\Rightarrow e^2 = e \Rightarrow R_R = eR \oplus (1-e)R$ modulus-direktösszeg. Másrészt minden $r \in R$-re $er \in I \Rightarrow ere = er$ és $re \in I \Rightarrow ere = re$, tehát $er = re$, vagyis $e \in Z(R) \Rightarrow 1 - e \in Z(R)$, így a kapott felbontás gyűrű-direktösszeg is. Végül $eR \leq I = eI \leq eR$ miatt $I = eR$, tehát $R = I \oplus (1-e)R$ gyűrűk direkt összege.

2. *Bontsuk fel a KC_3 csoportalgebrát direkt felbonthatatlan modulusok direkt összegére, ha $K = \mathbb{Z}_2$, illetve $\mathbb{Z}_3$.*

Megoldás: Legyen $C_3 = \langle a \rangle$. $K = \mathbb{Z}_2$-re KC_3 kommutatív, és bármely elemének a 2-szerese 0, így tagonként lehet benne négyzetre emelni. Tetszőleges $e = x + ya + za^2$-re $e = e^2 \Leftrightarrow x + ya + za^2 = x^2 + y^2a^2 + z^2a^4 = x + za + ya^2$ (használjuk azt is, hogy $c^2 = c$ igaz minden $c \in \mathbb{Z}_2$ elemre). Tehát csak $y = z$ esetén kapunk idempotens elemet: 0, 1, $a + a^2$ és $1 + a + a^2$. Ebből csak az utolsó kettő ad valódi direkt felbontást: az $(1 + a + a^2)$ 1-dimenziós részmodulust generál, így ennek kiegészítője, az $(a + a^2)$ idempotens elem 2-dimenziósat.

$K = \mathbb{Z}_3$ fölött köbre emelni lehet tagonként. Ha e idempotens, akkor $e^3 = e^2e = ee = e$ is igaz, ez pedig az $e = x + ya + za^2$ elemre azt jelenti, hogy $x + ya + za^2 = x + y + z$, tehát $y = z = 0$ esetén lehet csak idempotens az elem, és ezek közül -1 nem idempotens, tehát az algebrában összesen két idempotens van, a 0 és az 1. Ebből következik, hogy az algebra reguláris modulusa direkt felbonthatatlan.

3. *Legyen $A = K^{n \times n}$ a teljes mátrixalgebra.*
a) Bizonyítsuk be, hogy $E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}$ páronként ortogonális idempotensek teljes rendszere!
b) Bizonyítsuk be, hogy az $A_A = \oplus_{i=1}^n E_{ii}A$ felbontás tagjai egyszerű, egymással izomorf modulusok!

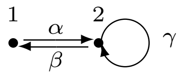
Megoldás: a) $E_{ii}^2 = E_{ii}$, $E_{ii}E_{jj} = 0$ if $i \neq j$, és $\sum_{i=1}^n E_{ii} = I$ az A egységeleme, tehát $A_A = \oplus_{i=1}^n E_{ii}A$.

b) $E_{ii}A$ azokból a mátrixokból áll, amelyeknek az i. során kívül minden eleme 0. Tegyük fel, hogy egy $M \neq 0$ mátrix eleme az $U \leq E_{ii}A$ részmodulusnak. A mátrix i. sorának valamelyik eleme nem nulla, mondjuk, $m_{ij} \neq 0$. Ekkor $M(E_{jk}m_{ij}^{-1}) = E_{ik}$, tehát E_{ik} benne van U-ban minden k-ra, és akkor a teljes $E_{ii}A$ is. Ezzel beláttuk, hogy a komponensek egyszerűek. Az E_{ji}-vel való balszorzás modulushomomorfizmus $E_{ii}A$-ból $E_{jj}A$-ba, míg az E_{ij}-vel való balszorzás modulushomomorfizmus E_{jj}-ből E_{ii}-be, és a két homomorfizmus kompozíciója $E_{ii}X \mapsto E_{ij}E_{ji}E_{ii}X = E_{ii}X$, illetve $E_{jj}X \mapsto E_{ji}E_{ij}E_{jj}X = E_{jj}X$ az identikus leképezés, így $E_{ii}A$ és $E_{jj}A$ izomorfak.

4. *Bizonyítsuk be, hogy ha Γ véges gráf n csúccsal, és e_i az i. csúcsból kiinduló 0 hosszúságú út, akkor a $K\Gamma$ gráfalgebrában az $e_iK\Gamma$ részmodulusok direkt felbonthatatlanok (tehát e_i nem bontható fel $e_iK\Gamma$-beli ortogonális idempotensek összegére), de $e_iK\Gamma$-ban előfordulhat a 0-n és e_i-n kívül más idempotens is.*

Megoldás: Ha $e_iK\Gamma$ felbontható, akkor e_i két $e_iK\Gamma$-beli ortogonális idempotens összegére bomlik, azaz $e_i = f_1 + f_2$, ahol $f_1 = \lambda e_i + u$, $f_2 = (1-\lambda)e_i - u$, $\lambda \in K$, u pedig i-ből induló legalább 1 hosszúságú utak lineáris kombinációja. Ekkor $f_1f_2 = 0$-ból $\lambda(1-\lambda)e_i + ((1-\lambda)ue_i - \lambda u - u^2) = 0$ következik. Minthogy a második összeadandó csak 0-nál hosszabb utakból áll, $\lambda(1-\lambda) = 0$, azaz $\lambda = 0$ vagy 1; feltehető, hogy $\lambda = 0$. De ekkor $f_1 = u$ nem lehet idempotens, mert ha a benne nem nulla együtthatóval szereplő utak minimális hossza k, akkor u^2-ben csak legalább $2k$ hosszú utak szerepelnek.

Más idempotens azért létezhet. Legyen például Γ egy kétcsúcsú gráf egyetlen α éllel 1-ből 2-be. Ekkor $e_1 + \alpha \in e_1 K\Gamma$ is idempotens, de a kiegészítője, $-\alpha$ nem idempotens (és nem is ortogonálisak).

5. *Adjuk meg az A algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha $A = K\Gamma/I$, ahol Γ:*  *és*

a) $I = (\alpha\gamma, \gamma^2, \gamma\beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta)$;

b) $I = (\alpha\gamma^2, \gamma^2 - \beta\alpha, \alpha\beta)$.

Megoldás: a) $A_A = \begin{array}{c}1\\2\\1\end{array} \oplus \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & & 2 \\ 2 & & \end{array}$

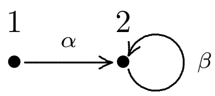
b) $A_A = \begin{array}{c}1\\2\\2\\1\end{array} \oplus \begin{array}{cccc} & 2 & & \\ 1 & & 2 & \\ & 2 & & 1 \\ & & 2 & \end{array}.$

Itt a számok egymás alá írása vagy fél hellyel arrébb alá írása lefelé menő nyíllal való összekötést jelent.

6. *Lehet-e az alábbi egy $K\Gamma/I$ algebra reguláris jobbmodulusának Loewy-diagramja? Ha igen, adjuk meg a Γ gráfot és az I ideálnak egy generátorrendszerét!*

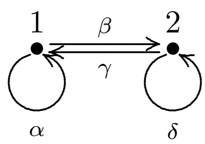
a) $\begin{array}{c}1\\2\\2\\2\end{array} \oplus \begin{array}{c}2\\2\end{array}$ *b)* $\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 2 \\ & 2 & \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{array}$ *c)* $\begin{array}{c}1\\2\end{array} \oplus \begin{array}{c}2\\3\end{array} \oplus 3$

Megoldás: a) Nincs ilyen algebra. Ugyanis ennek az algebrának a gráfja csak



lehetne, de a második komponensből leolvasható, hogy $\beta^2 = 0$, míg az első komponensből azt látjuk, hogy $\alpha\beta^2 \neq 0$, ami ellentmondás.

b) Az algebra gráfja



és $I = (\alpha^2, \beta\gamma, \alpha\beta - \beta\delta, \gamma\alpha, \gamma\beta, \delta^2, \delta\gamma)$.

c) Az algebra gráfja $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$, és $I = (\alpha\beta)$.

Hf1. *Legyen $e \in R$ idempotens elem. Bizonyítsuk be, hogy eR pontosan akkor direkt felbonthatatlan direkt összeadandója R_R-nek, ha nincs eRe-ben a 0-n és e-n kívül más idempotens elem.*

Hf2. *Írjuk fel az $A = K\Gamma/I$ algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha*

$$\Gamma : 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\delta}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} 3, \qquad I = (\alpha\beta, \beta\alpha - \gamma\delta, \delta\beta, \delta\gamma).$$