1. *Legyen $A = K\Gamma/I$ az az algebra, amelynek reguláris jobbmodulusa $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$. Határozzuk meg az $\begin{smallmatrix} & & 1\\ 1 & & 2\\ & 2 & \end{smallmatrix}$ modulus összes részmodulusát és az ezekkel vett faktorainak Loewy-diagramját!*

Megoldás: Az algebra gráfja Γ :

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, "\alpha"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

és $A = K\Gamma/(\alpha\beta^2, \beta^3)$. Nevezzük el az $M = \begin{smallmatrix} & & 1\\ 1 & & 2\\ & 2 & \end{smallmatrix}$ modulus báziselemeit b_1, c_1, b_2, c_2-nek, ahol $Me_1 = \langle b_1, c_1\rangle$, $Me_2 = \langle b_2, c_2\rangle$ úgy, hogy a modulus

$$\begin{tikzcd} & & c_1 \arrow[d, dash, "\alpha"] \\ b_1 \arrow[dr, dash, "\alpha"'] & & c_2 \arrow[dl, dash, "\beta"] \\ & b_2 & \end{tikzcd}$$

Legyen $U \le M$. Először tegyük fel, hogy $Ue_1 \not\le \langle b_1\rangle_K$. Ekkor U-ban van $u = \lambda b_1 + c_1$ alakú elem, és így $u\alpha = \lambda b_2 + c_2$, és $u\alpha\beta = b_2 \Rightarrow b_2, c_2 \in U$, tehát vagy $U = M$, vagy U háromdimenziós, és bázisa $\{\,\lambda b_1 + c_1, c_2, b_2\,\}$. Legyen ez U_λ. Ezeknek a modulusoknak a Loewy-diagramja $\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}$ (a Loewy-diagramhoz tartozó bázis a $\{\,\lambda b_1 + c_1, \lambda b_2 + c_2, b_2\,\}$). Ha $0 \ne Ue_1 \le \langle b_1\rangle_K$, akkor $b_1 \in U$, és ebből $b_2 \in U$ is következik. Így Ue_2 vagy Me_2-vel egyezik meg, vagy egydimenziós, tehát a részmodulus vagy $\langle b_1, b_2, c_2\rangle = \begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$, vagy $\langle b_1, b_2\rangle = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$.
Ha $Ue_1 = 0$, és $U = Ue_2 \not\le \langle b_2\rangle_K$, akkor van $u = \lambda b_2 + c_2$ alakú eleme, és $u\beta = b_2 \in U$, így $b_2, c_2 \in U$, és $U = \langle c_2, b_2\rangle = \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$. Ha $0 \ne U = Ue_2 \le \langle b_2\rangle_K$, akkor $U = \langle b_2\rangle$, és a Loewy-diagramja 2. Így a végtelen sok (de egymással izomorf) U_λ részmoduluson kívül, a 0-t is beleszámítva 5 részmodulus van (és így összesen 6 izomorfiatípus). A faktormodulusok Loewy-diagramjukkal felírva: 0, 1, $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$, $1 \oplus 1$, $1 \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$, és maga M.

2. *Legyen $A_A = \begin{smallmatrix} & & 1\\ 1 & & 2\\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\end{smallmatrix}$ Hány dimenziós az A algebra fölött a* $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix})$, *illetve a* $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\end{smallmatrix})$ *vektortér?*

Megoldás: Legyen $M = \begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\end{smallmatrix}$ és $N = \begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$. Az M Loewy-diagramjának tetején levő számnak megfelelő generátorelemet csak a kétdimenziós Ne_2 altérbe képezhetjük, és van két ilyen független homomorfizmus: M-et $S(1)$-gyel lefaktorizálva, a $\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$ modulust beágyazhatjuk N-be, illetve az $M/(1 \oplus 2) \cong 2$ faktormodulust beágyazhatjuk N-be úgy, hogy a kép az N Loewy-diagramjának alján levő számnak megfelelő egydimenziós részmodulus (ez az N talpa, azaz az egyszerű részmodulusok generátuma). Így $\dim_K \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}) = 2$.

N-nek nyilván nincs monomorfizmusa M-be (a dimenziók miatt ennek izomorfizmusnak kellene lennie), és könnyen látható, hogy N minden nem nulla részmodulusa tartalmazza az N talpát, 2-t, tehát a homomorfizmusok valójában $1 \oplus 2$-ből mennek. Ez viszont csak az M, szintén $1 \oplus 2$-vel izomorf talpába képződhet. A $\mathrm{Hom}(1 \oplus 2, 1 \oplus 2)$ vektorteret generálják a $\pi_1\iota_1$ és $\pi_2\iota_2$ morfizmusok, tehát 2-dimenziós.

3. *A következők közül melyik definiál funktort a morfizmusokon való természetes hatással együtt?*
a) $G \mapsto G'$ *a csoportok kategóriájában;*
b) $G \mapsto Z(G)$ *a csoportok kategóriájában;*

c) $A \mapsto t(A)$ az Abel-csoportok kategóriájában, ahol $t(A)$ az A torziórészcsoportja, azaz véges rendű elemeinek csoportja.

Megoldás: a) Ha $\varphi : G \to H$ csoport-homomorfizmus, akkor

$$G'\varphi = \langle x^{-1}y^{-1}xy \,|\, x, y \in G\rangle\, \varphi = \langle (x\varphi)^{-1}(y\varphi)^{-1}(x\varphi)(y\varphi) \,|\, x, y \in G\rangle \le H',$$

tehát a morfizmusokon definiálhatjuk a funktort úgy hogy φ képe $\varphi\ |_{G'}$, azaz a kommutátor-részcsoportra való megszorítás legyen. Így nyilván kovariáns funktort kapunk.

b) Az előző módszer itt nem működik, mivel a csoporthomomorfizmus a centrumot nem feltétlenül képezi a centrumba. És valóban nem lehet sem kovariáns sem kontravariáns funktort definiálni a morfizmusokon. Tekintsük például a $C_2 = \{\,1, a\,\}$ ciklikus csoportot és a $D_3 = \langle f, t\rangle$ diédercsoportot, ahol f az egyik forgatás és t az egyik tükrözés. Legyen továbbá $C_2 \xrightarrow{\alpha} D_3 \xrightarrow{\beta} C_2$, ahol $\alpha : a \mapsto t,\ \ \beta : f \mapsto 1,\ t \mapsto a$. Ekkor $\alpha\beta = \mathrm{id}_{C_2}$, tehát $F(\alpha\beta) = \mathrm{id}_{Z(C_2)} = \mathrm{id}_{C_2}$ lenne. Viszont $Z(D_3) = 1$, tehát α és β képe is csak a triviális homomorfizmus lehet, és így a képek szorzata (akár invariáns akár kovariáns lenne a funktor) csak az azonosan 1 homomorfizmus lehetne.

c) Az a) részhez hasonlóan itt is kovariáns funktort tudunk definiálni, mert a torzió-részcsoportot minden homomorfizmus torziórészcsoportba képezi.

4. *Bizonyítsuk be, hogy $M \in R$-Mod-ra $X \mapsto X \underset{R}{\otimes} M$ kovariáns funktor* Mod-R*-ből az Abel-csoportok kategóriájába.*

Megoldás: Legyen $F = -\underset{R}{\otimes} M$ a funktor. $X \xrightarrow{\alpha} Y$-hoz az $X \underset{R}{\otimes} M \xrightarrow{F(\alpha)} Y \underset{R}{\otimes} M$ morfizmust a tenzorszorzat univerzális tulajdonsága segítségével definiáljuk.
A $\varphi : X \times M \to Y \underset{R}{\otimes} M$, $(x, m) \mapsto x\alpha \otimes m$ leképezés R-középlineáris:
$(x+x', m)\varphi = (x+x')\alpha \otimes m = (x\alpha + x'\alpha) \otimes m = x\alpha \otimes m + x'\alpha \otimes m = (x, m)\varphi + (x', m)\varphi$,
$(x, m+m')\varphi = x\alpha \otimes (m+m') = x\alpha \otimes m + x\alpha \otimes m' = (x, m)\varphi + (x, m')\varphi$.
$(xr, m)\varphi = (xr)\alpha \otimes m = (x\alpha)r \otimes m = x\alpha \otimes rm = (x, rm)\varphi$.
Így φ átvezethető az $X \underset{R}{\otimes} M$ tenzorszorzaton egy $F(\alpha)$ homomorfizmussal, amelyre tehát $(x \otimes m) = x\alpha \otimes m\ \forall x, m$.
Az F funktortulajdonságait ($F(\alpha\beta) = F(\alpha)F(\beta)$ és $F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$), és additivitását ($F(\alpha + \beta) = F(\alpha) + F(\beta)$) elég ellenőrizni a tenzorszorzat $x \otimes m$ generátorelemein.
$(x \otimes m)F(\alpha\beta) = x\alpha\beta \otimes m = (x\alpha \otimes m)F(\beta) = ((x \otimes m)F(\alpha))F(\beta)$,
$(x \otimes m)F(\mathrm{id}_X) = x\mathrm{id}_X \otimes m = x \otimes m$,
$(x \otimes m)F(\alpha + \beta) = (x(\alpha + \beta)) \otimes m = (x\alpha + x\beta) \otimes m = x\alpha \otimes m + x\beta \otimes m =$
$= (x \otimes m)F(\alpha) + (x \otimes m)F(\beta)$

5. *Legyen A az a gráfalgebra, amelyre a reguláris modulus Loewy-diagramja*

$$A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}.$$

Tekintsük a $0 \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 1 \to 0$ *sorozatot, ahol mindegyik morfizmus a legnagyobb rangú olyan homomorfizmus (azaz a képe vektortérként maximális dimenziós), ami a Loewy-diagramokban használt báziselemeket báziselemekbe vagy 0-ba viszi. Határozzuk meg a sorozat homológiáit!*

Megoldás: Legyen a lánckomplexus $M_\bullet$ a $d_\bullet$ határleképezéssel, és az utolsó nem nulla modulus M_0. Ekkor

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Ker} d_4 = {\scriptstyle 1} & \operatorname{Ker} d_3 = \begin{smallmatrix}1&&3\\&2&\end{smallmatrix} & \operatorname{Ker} d_2 = {\scriptstyle 2} & \operatorname{Ker} d_1 = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} & \operatorname{Ker} d_0 = {\scriptstyle 1} \\
\operatorname{Im} d_5 = 0 & \operatorname{Im} d_4 = {\scriptstyle 2} & \operatorname{Im} d_3 = {\scriptstyle 2} & \operatorname{Im} d_2 = {\scriptstyle 1} & \operatorname{Im} d_1 = {\scriptstyle 1} \\
H_4(M_\bullet) = {\scriptstyle 1} & H_3(M_\bullet) = {\scriptstyle 1} \oplus {\scriptstyle 3} & H_2(M_\bullet) = 0 & H_1(M_\bullet) = {\scriptstyle 2} & H_0(M_\bullet) = 0
\end{array}$$

A többi homológia mind 0.

Hf1. *Legyen A a 2. feladat algebrája, és $M = \begin{smallmatrix}1&&2&\\&2&&1\end{smallmatrix}$, $N = \begin{smallmatrix}&1&\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$ modulusok A fölött (a ferdén egymás alatt levő számok vannak összekötve nyíllal). Határozzuk meg a $\operatorname{Hom}(M,N)$ és $\operatorname{Hom}(N,M)$ vektorterek dimenzióját, és a lehetséges nemnulla homomorfizmusok magjának Loewy-diagramját!*

Hf2. *Határozzuk meg az összes olyan α, β homomorfizmust, amelyre a $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2 \to 0$ sorozat féligegzakt, és adjuk meg minden esetben a homológiákat!*