1. *Legyen* $\xi: \ 0 \to X \stackrel{\alpha}{\to} Y \stackrel{\beta}{\to} Z \to 0$ *sorozat* mod-R*-ben. Bizonyítsuk be, hogy a következő állítások ekvivalensek:*
(i) ξ *egzakt, és* $\operatorname{Im}\alpha$ *direkt összeadandó* Y*-ban (így* $Y \cong X \oplus Z$*);*
(ii) ξ *egzakt, és* $\exists \alpha' : Y \to X$*, hogy* $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$*;*
(iii) ξ *egzakt, és* $\exists \beta' : Z \to Y$*, hogy* $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$*;*
(iv) $\exists \alpha : Y \to X$ *és* $\beta' : Z \to Y$*, hogy* $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$*,* $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$*,* $\alpha\beta = 0$*,* $\beta'\alpha' = 0$*, és* $\alpha'\alpha + \beta\beta' = \mathrm{id}_Y$*.*
Ilyenkor a ξ *sorozatot felhasadó rövid egzakt sorozatnak hívjuk.*

Megoldás: (i)⇒(ii): Legyen $Y = Y_1 \oplus Y_2$, ahol $Y_1 = \operatorname{Im}\alpha$, és π_1 az első komponensre való vetítés. Ekkor $\alpha' := \pi_1\alpha^{-1}$ értelmezve van, és jól van definiálva, mert α injektív. Továbbá $x \in X$-re $x\alpha\alpha' = x\alpha\pi_1\alpha^{-1} = x\alpha\alpha^{-1} = x$, tehát $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$.

(ii)⇒(iii): Tetszőleges $z \in Z$-re legyen $y \in Y$ olyan, amelyre $z = y\beta$, és legyen $\beta' : z \mapsto y - y\alpha'\alpha$. Ilyen y van, mert β szürjektív, és a β' leképezés jól definiált (és persze művelettartó), ugyanis ha $y\beta = y'\beta = z$, akkor $(y - y')\beta = 0$ miatt $y - y' \in \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha$, azaz van olyan $x \in X$, amelyre $y - y' = x\alpha$. Tehát $(y - y\alpha'\alpha) - (y' - y'\alpha'\alpha) = (y - y') - (y - y')\alpha'\alpha = x\alpha - x\alpha\alpha'\alpha = x\alpha - x\alpha = 0$. Végül $z = y\beta$-ra $z\beta'\beta = (y - y\alpha'\alpha)\beta = y\beta - y\alpha'\alpha\beta = z - 0 = z$, vagyis $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$.

(iii)⇒(i): $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$ az egzaktság miatt. Belátjuk, hogy $Y = \operatorname{Ker}\beta \oplus \operatorname{Im}\beta'$.
$Y = \operatorname{Ker}\beta + \operatorname{Im}\beta'$: $y \in Y$-ra $(y - y\beta\beta')\beta = y\beta - y\beta\beta'\beta = y\beta - y\beta = 0 \Rightarrow y - y\beta\beta' \in \operatorname{Ker}\beta$ $\Rightarrow y \in \operatorname{Ker}\beta + \operatorname{Im}\beta'$.
$\operatorname{Ker}\beta \cap \operatorname{Im}\beta' = 0$: Legyen $y = z\beta' \in \operatorname{Im}\beta' \cap \operatorname{Ker}\beta$. Ekkor $0 = y\beta = z\beta'\beta = z\mathrm{id}_Z = z \Rightarrow$ $y = z\beta' = 0\beta' = 0$.

(ii)⇒(iv): Legyen β' a (ii)⇒(iii) bizonyításában megadott homomorfizmus: $y\beta = z$ esetén $z\beta' = y - y\alpha'\alpha$. Láttuk, hogy az eleve feltett $\alpha\beta = 0$ összefüggés mellett $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$ és $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$. Továbbá $z = y\beta$-ra $z\beta'\alpha' = (y - y\alpha'\alpha)\alpha' = y\alpha' - y\alpha'\alpha\alpha' = y\alpha' - y\alpha' = 0$, így $\beta'\alpha' = 0$ is teljesül. Végül $y(\alpha'\alpha + \beta\beta') = y\alpha'\alpha + (y\beta)\beta' = y\alpha'\alpha + (y - y\alpha'\alpha) = y$ minden $y \in Y$-ra, ezért $\alpha'\alpha + \beta\beta' = \mathrm{id}_Y$.

(iv)⇒(ii): A feltételek szerint van olyan α, amelyre $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$, tehát csak azt kell bizonyítani, hogy a sorozat egzakt (ami ezúttal nem feltétel).
$\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$ injektív $\Rightarrow \alpha$ injektív.
$\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$ szürjektív $\Rightarrow \beta$ szürjektív.
$\alpha\beta = 0 \Rightarrow$ a sorozat féligegzakt.
$\operatorname{Ker}\beta \leq \operatorname{Im}\alpha$: Ha $y \in \operatorname{Ker}\beta$, akkor $y = y\alpha'\alpha + y\beta\beta' = y\alpha'\alpha + 0 \in \operatorname{Im}\alpha$.

2. *Legyen* $M_\bullet : 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{Z}_2 \to 0$ *egzakt sorozat, és* $F : \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_2, -)$*,* $G : \operatorname{Hom}(-, \mathbb{Z}_2)$ *funktorok. Bizonyítsuk be, hogy* $F_\bullet(M_\bullet)$ *és* $G_\bullet(M_\bullet)$ *egyike sem egzakt. Melyik láncszemnél romlik el az egzaktság?*

Megoldás: $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = 0$, $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, tehát az F kovariáns, illetve G kontravariáns funktorok alkalmazása által kapott sorozatok:

$$0 \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z}_2 \to 0, \text{ illetve}$$
$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \to 0.$$

Ha ezek egzaktak lennének, akkor a középső modulust megkapnánk a két szomszédjának a bővítéseként, de ez már a méretek miatt sem lehetséges: $\mathbb{Z}_2$ nem lehet a 0-nak faktormodulusa, illetve, ha $\mathbb{Z}_2$-t lefaktorizáljuk egy $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf részmodulusával (valójában ez az egész lenne), akkor 0-t kapunk, nem $\mathbb{Z}_2$-t. Tehát egyik sorozat sem egzakt.
Az első sorozat a 0-kban persze egzakt, tehát csak a $\mathbb{Z}_2$-nél lehet baj. A másodiknál meg kell nézni, hogy mik a morfizmusok. A $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \stackrel{G(\cdot 1)}{\to} \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ a generátorelemet a generátorelembe viszi, ezért itt izomorfia van. Viszont $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \stackrel{G(\cdot 2)}{\to} \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ a 0

homomorfizmus. Könnyen látható, hogy a $0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \to 0$ sorozat csak az utolsó $\mathbb{Z}_2$-nél nem egzakt.

3. *Legyen $0 \to V_1 \to \cdots \to V_m \to 0$ vektorterek egzakt sorozata. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\sum\limits_k \dim V_{2k} = \sum\limits_k \dim V_{2k+1}$.*

Megoldás: Legyenek a sorozat homomorfizmusai $V_n \xrightarrow{d_n} V_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$, ahol a hiányzó tagok mind 0-k. A dimenziótétel és az egzaktság miatt $\dim V_n = \dim \operatorname{Ker} d_n + \dim \operatorname{Im} d_n = \dim \operatorname{Ker} d_n + \dim \operatorname{Ker} d_{n+1}$, így $\sum\limits_k \dim V_{2k} = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{Ker} d_n = \sum\limits_k \dim V_{2k+1}$.

4. *(3×3-lemma) Tegyük fel, hogy az alábbi kommutatív diagram sorai egzaktak.*

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'' \arrow[r] \arrow[d] & Y'' \arrow[r] \arrow[d] & Z'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

a) Bizonyítsuk be, hogy ha a középső oszlop egzakt, akkor első oszlop akkor és csak akkor egzakt, ha a harmadik az.

b) Mutassuk meg, hogy az első és utolsó oszlop egzaktságából együtt sem következik, hogy a középső oszlop egzakt.

Megoldás: a) A középső oszlop féligegzaktságából következik a másik két oszlop féligegzaktsága:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\alpha"] & Y' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\beta"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha'"] & Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta'"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'' \arrow[r, "\varphi''"] \arrow[d] & Y'' \arrow[r, "\psi''"] \arrow[d] & Z'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

$\alpha\alpha'\varphi'' = \varphi'\beta\beta' = 0$, és φ'' injektív, ezért $\alpha\alpha' = 0$;
$\psi'\gamma\gamma' = \beta\beta'\psi'' = 0$, és ψ' szürjektív, ezért $\gamma\gamma' = 0$.
Így az oszlopokat tekinthetjük lánckomplexusoknak, és a diagramot lánckomplexusok rövid egzakt sorozatának. Ebből a homológiák hosszú egzakt sorozatát kapjuk:

$$\cdots \to H_n(X_\bullet) \to H_n(Y_\bullet) \to H_n(Z_\bullet) \to H_{n-1}(X_\bullet) \to H_{n-1}(Y_\bullet) \cdots$$

Mivel $Y_\bullet$ egzakt, minden homológiája 0, és így az előbbi sorozat egzaktságából következik, hogy $H_n(Z_\bullet) \cong H_{n-1}(X_\bullet)$ minden n-re, tehát ha az egyik lánckomplexus egzakt, azaz minden homológiája 0, akkor a másik is az.

b) Egyszerű diagramvadászattal látható, hogy β injektivitása és β' szürjektivitása következik a feltételekből (vagy akár a kígyó-lemmából is), sőt, ha a középső oszlop féligegzakt, akkor az a) rész hosszú egzakt sorozata azt adja, hogy egzakt is. Tehát olyan ellenpéldát kell keresni, ahol $\operatorname{Im}\beta \not\leq \operatorname{Ker}\beta'$, de minden más helyen mindkét irányban teljesül az egzaktság. Vektorterekből is konstruálhatunk ilyen ellenpéldát. A következő diagramban a mátrixok jobbról hatnak, és így balról jobbra szorzunk, amikor a leképezések kompozícióját számoljuk.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & 0 & \xrightarrow{0} & K & \xrightarrow{[1]} & K & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle [0\ 1]} & & \downarrow{\scriptstyle [1]} & & \\
0 & \to & K & \xrightarrow{[1\ 0]} & K \oplus K & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]} & K & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle [1]} & & \downarrow{\scriptstyle \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \\
0 & \to & K & \xrightarrow{[1]} & K & \xrightarrow{0} & 0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

5. *Tekintsük az $f_\bullet$:*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \to & 0 & \to & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{1\mapsto 4} & \mathbb{Z}_8 & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \to & 0 & \to & \cdots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\cdots & \to & 0 & \to & \mathbb{Z}_8 & \xrightarrow{1\mapsto 2} & \mathbb{Z}_8 & \xrightarrow{1\mapsto 4} & \mathbb{Z}_8 & \to & 0 & \to & \cdots
\end{array}
$$

láncleképezést, ahol a felső lánckomplexus $X_\bullet$, az alsó $Y_\bullet$, és a lefelé menő nyilak ($f_\bullet$) természetes beágyazások.

Határozzuk meg a $0_\bullet \to X_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} Y_\bullet \to \operatorname{Coker} f_\bullet \to 0_\bullet$ *rövid egzakt sorozathoz tartozó hosszú egzakt sorozatot!*

Megoldás: A diagram a komagokkal együtt:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \to & 0 & \to & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{1\mapsto 4} & \mathbb{Z}_8 & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \to & 0 & \to & \cdots \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & & & \\
\cdots & \to & 0 & \to & \mathbb{Z}_8 & \xrightarrow{1\mapsto 2} & \mathbb{Z}_8 & \xrightarrow{1\mapsto 4} & \mathbb{Z}_8 & \to & 0 & \to & \cdots \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle g_2} & & \downarrow{\scriptstyle g_1} & & \downarrow{\scriptstyle g_0} & & & & \\
\cdots & \to & 0 & \to & \mathbb{Z}_2 & \to & 0 & \to & \mathbb{Z}_4 & \to & 0 & \to & \cdots
\end{array}
$$

ahol az oszlopok rövid egzakt sorozatok a 0-k kiírása nélkül, és az első két sor közötti függőleges morfizmusok az $f_2 : 1 \mapsto 2$, $f_1 : 1 \mapsto 1$ és $f_0 : 1 \mapsto 4$ megfeleltetésekkel írhatók le, a második sor pedig $g_i : 1 \mapsto 1$ $(i = 2, 1, 0)$. A homológiák a következők:

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_8/4\mathbb{Z}_8 & \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 & 0 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
0 & 4\mathbb{Z}_8 & 2\mathbb{Z}_8/2\mathbb{Z}_8 & \mathbb{Z}_8/4\mathbb{Z}_8 & 0 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
0 & \mathbb{Z}_2 & 0 & \mathbb{Z}_4/0 & 0
\end{array}
$$

$H_2(f_\bullet) : [2] \mapsto [4]$, azaz $2\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2$ generátoreleme $4\mathbb{Z}_8 \cong \mathbb{Z}_2$ generátorelemébe megy, $H_2(g_\bullet) : [4] \mapsto [4] = [0]$, $\partial_2 : [1] \leftarrow 1 \to 2 \leftarrow [2]$, $H_0(g_\bullet) : [1] \mapsto [1]$, a hosszú egzakt sorozat többi morfizmusa pedig nyilvánvalóan nulla. Tehát a homológiák hosszú egzakt sorozata:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "\cong"] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots & 0 \arrow[d] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "0"'] & 0 \arrow[d] & \mathbb{Z}_4 \arrow[d, "\cong"'] & 0 \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 \arrow[uur] & \mathbb{Z}_2 \arrow[uur, "\cong"'] & 0 \arrow[uur] & \mathbb{Z}_4 \arrow[uur] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy egy* $0 \to X \overset{\alpha}{\to} Y \overset{\beta}{\to} Z \to 0$ *féligegzakt sorozat akkor és csak akkor homotóp a csupa-*0 *sorozattal, ha felhasadó egzakt.*

Hf2. *Legyen* $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$, *és tekintsük a*

$$0 \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & & 2 \\ 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix} \to 0$$

egzakt sorozatot. Mutassuk meg, hogy a $\mathrm{Hom}(-, \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix})$ *funktorral vett képe nem egzakt. (Útmutatás: mennyi* $\dim_K \mathrm{Hom}(M_i, \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix})$ *a szereplő* M_i *modulusokra?)*