1. *Tekintsük az $f_\bullet$:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \to & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \cdot 4 & & \downarrow \cdot 4 & & \downarrow \cdot 4 & & \downarrow & & \\
\cdots & \to & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z}_{16} & \xrightarrow{\cdot 4} & \mathbb{Z}_8 & \longrightarrow & 0 & \to & \cdots
\end{array}$$

lánceképezést, ahol a felső lánckomplexus $X_\bullet$, az alsó $Y_\bullet$.
Határozzuk meg a $0_\bullet \to X_\bullet \to Y_\bullet \to \operatorname{Coker} f_\bullet \to 0_\bullet$ rövid egzakt sorozathoz tartozó hosszú egzakt sorozatot!

Megoldás: A függőleges nyilak injektívek, így a komagokkal kiegészítve a diagramot valóban komplexusok rövid egzakt sorozatát kapjuk:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \to & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \cdot 4 & & \downarrow \cdot 4 & & \downarrow \cdot 4 & & \downarrow & & \\
\cdots & \to & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z}_{16} & \xrightarrow{\cdot 4} & \mathbb{Z}_8 & \longrightarrow & 0 & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \cdot 1 & & \downarrow \cdot 1 & & \downarrow \cdot 1 & & & & \\
\cdots & \to & 0 & \to & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_4 & \to & 0 & \to & \cdots
\end{array}$$

Kiszámolhatjuk a homológiákkal együtt a köztük menő indukált morfizmusokat is, de most inkább felírjuk a homológiák hosszú egzakt sorozatát, és csak ott nézzük meg, hogy mi a morfizmus, ahol ez az egzaktságból nem következik egyértelműen.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots & 0 \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \mathbb{Z}_4 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 \arrow[uur] & \mathbb{Z}_2 \arrow[uur] & \mathbb{Z}_2 \arrow[uur] & \mathbb{Z}_4 \arrow[uur] & 0 &
\end{tikzcd}$$

A középső 0 miatt az első $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ morfizmus szürjektív, a második injektív, és a csoportok végessége és azonos elemszáma miatt ebből következik, hogy mindkét ferde $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ morfizmus izomorfizmus. Mivel másodrendű csoportokról van szó, csak egy izomorfizmus van köztük, tehát itt nincs mit kiszámolni.
Az első ferde $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ injektivitása miatt a $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ morfizmus 0, tehát a $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ morfizmus szürjektív, és az eleje miatt injektív is, ezért izomorfizmus. Ez lehetne $\pm\mathrm{id}$ bármelyike, de ez csak az első generátorelem megválasztásától függ, tehát vehetjük úgy, hogy ez a morfizmus $1 \mapsto 1$.
Hasonlóan, a második ferde $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ morfizmus szürjektivitása miatt $\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_4$, így $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ izomorfizmus, és az is lehet $1 \mapsto 1$ az utolsó $\mathbb{Z}_4$ generátorelemének alkalmas megválasztásával. Tehát a hosszú egzakt sorozat:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\cong"] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots & 0 \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d, "0"'] & 0 \arrow[d] & \mathbb{Z}_4 \arrow[d, "\cong"'] & 0 \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 \arrow[uur] & \mathbb{Z}_2 \arrow[uur, "\cong"] & \mathbb{Z}_2 \arrow[uur, "\cong"] & \mathbb{Z}_4 \arrow[uur] & 0 &
\end{tikzcd}$$

ahol mindegyik izomorfizmust vehetjük az $1 \mapsto 1$ leképezésnek.

2. *Számítsuk ki az*

a) $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\end{smallmatrix} \oplus 3$ *reguláris modulusú algebra fölötti* $X = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ *és* $Y = \begin{smallmatrix}2\end{smallmatrix}$ *modulus projektív feloldását;*

b) az $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$ *reguláris modulusú algebra fölötti* $\begin{smallmatrix}&1\\1&2\\&2\end{smallmatrix}$ *modulus projektív feloldását;*

c) a $\mathbb{Z}_2$ *Abel-csoport injektív feloldását.*

Megoldás: a)

$$0 \to \begin{smallmatrix}3\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2&\\1&&\mathbf{3}\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\\mathbf{2}\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\\\mathbf{1}\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}\mathbf{1}\\2\end{smallmatrix} \to 0$$

$$0 \to \begin{smallmatrix}3\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2&\\1&&\mathbf{3}\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\\mathbf{2}\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2&\\\mathbf{1}&&\mathbf{3}\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}\mathbf{2}\end{smallmatrix} \to 0,$$

ahol a projektív modulus generátorelemeinek képét a következő modulusban vastagítás mutatja.

b)

$$\cdots \to \begin{smallmatrix}2\\2\\\mathbf{2}\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}2\\\mathbf{2}\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}2\\2\\\mathbf{2}\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\\mathbf{2}\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\\\mathbf{2}\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&1\\1&2\\&2\end{smallmatrix} \to 0$$

Itt a $P_1 \to P_0$ leképezés a $\begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$ generátorelemét a két vastagított báziselem különbségébe képezi. Ebben a sorozatban a morfizmusok magjai felváltva $\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$-vel és $\begin{smallmatrix}2\end{smallmatrix}$-vel izomorfak.

c)

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_{2^\infty} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_{2^\infty} \to 0$$

3. *Számítsuk ki a 2.a) feladat X modulusára a csonkolt projektív feloldásnak a* $\mathrm{Hom}(-, \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix})$ *kontravariáns funktornál vett képét, és a kapott komplexus kohomológiáinak dimenzióját!*

Megoldás: A csonkolt projektív feloldás:

$$0 \to \begin{smallmatrix}3\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2&\\1&&\mathbf{3}\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\\mathbf{2}\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\\\mathbf{1}\end{smallmatrix} \to 0,$$

a $\mathrm{Hom}(-, \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix})$ funktorral vett képe

$$0 \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}) \xrightarrow{d_0} \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}) \xrightarrow{d_1} \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}) \xrightarrow{d_2} \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}) \to 0$$

Itt d_0 az egydimenziós $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix})$ generátorelemét (azaz az $\begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix}$ részmodulussal való faktorizálást) 0-ba viszi, így $d_0 = 0$. A d_1 ugyanezt a morfizmust a $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix})$ 1-dimenziós tér nemtriviális morfizmusába viszi, így d_1 izomorfizmus. Végül $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}) = 0$, így $d_2 = 0$. Ebből azt kapjuk, hogy a nulladik kohomológia 1-dimenziós, az összes többi 0.

4. *(5-lemma) Tegyük fel, hogy a következő kommutatív diagram sorai egzaktak.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \to & B & \to & C & \to & D & \to & E \\
\downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \downarrow\delta & & \downarrow\varepsilon \\
A' & \to & B' & \to & C' & \to & D' & \to & E'
\end{array}$$

Mutassuk meg, hogy

a) ha α epimorfizmus, és β és δ monomorfizmusok, akkor γ monomorfizmus;

b) ha ε monomorfizmus, és β és δ epimorfizmusok, akkor γ epimorfizmus.

c) ha α, β, δ és ε izomorfizmusok, akkor γ is izomorfizmus.

Megoldás: Nevezzük el a vízszintes nyilakat is:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \xrightarrow{\varphi_1} & B & \xrightarrow{\varphi_2} & C & \xrightarrow{\varphi_3} & D & \xrightarrow{\varphi_4} & E \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\
A' & \xrightarrow{\psi_1} & B' & \xrightarrow{\psi_2} & C' & \xrightarrow{\psi_3} & D' & \xrightarrow{\psi_4} & E'
\end{array}$$

a) Tegyük fel, hogy valamely $c \in C$-re $c\gamma = 0$. Ekkor $0 = c\gamma\psi_3 = c\varphi_3\delta$, de δ injektív $\Rightarrow$ $c\varphi_3 = 0 \Rightarrow \exists b$: $c = b\varphi_2 \Rightarrow 0 = c\gamma = b\varphi_2\gamma = b\beta\psi_2 \Rightarrow \exists a'$: $b\beta = a'\psi_1$. De α szürjektív, ezért $\exists a$: $a' = a\alpha \Rightarrow b\beta = a'\psi_1 = a\alpha\psi_1 = a\varphi_1\beta$. Mivel β injektív, ebből $b = a\varphi_1$ következik, tehát $c = b\varphi_2 = a\varphi_1\varphi_2 = 0$.

b) Legyen $c' \in C'$ tetszőleges elem. Mivel δ szürjektív, $\exists d$: $c'\psi_3 = d\delta$. $\Rightarrow 0 = c'\psi_3\psi_4 = d\delta\psi_4 = d\varphi_4\varepsilon$, de ε injektív $\Rightarrow d\varphi_4 = 0 \Rightarrow \exists c$: $d = c\varphi_3 \Rightarrow c'\psi_3 = d\delta = c\varphi_3\delta = c\gamma\psi_3 \Rightarrow$ $(c' - c\gamma) \in \operatorname{Ker}\psi_3 = \operatorname{Im}\psi_2$, azaz $\exists b'$: $c' - c\gamma = b'\psi_2$. De β szürjektív, így $\exists b$: $b' = b\beta$, vagyis $c' - c\gamma = b\beta\psi_2 = b\varphi_2\gamma \Rightarrow c' = (c + b\varphi_2)\gamma$. Ezzel beláttuk, hogy γ szürjektív.

c) Az a) és a b) rész feltételei is teljesülnek, tehát γ injektív és szürjektív is, így izomorfizmus.

Hf1. *Bizonyítsuk be a komplexusok* $0_\bullet \to X_\bullet \to Y_\bullet \to Z_\bullet \to 0_\bullet$ *rövid egzakt sorozatához tartozó hosszú egzakt sorozatban az egzaktságot* $\mathrm{H}_n(Y_\bullet)$*-nál!*

Hf2. *Tekintsük az* $f_\bullet$*:*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \to & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \rightarrowtail & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \rightarrowtail & \mathbb{Z}_4 & \to & \cdots \\
& & \downarrow 0 & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow 0 & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow 0 & & \\
\cdots & \to & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \to & \cdots
\end{array}$$

láncleképezést, ahol a felső lánckomplexus $X_\bullet$*, az alsó* $Y_\bullet$*.*
Határozzuk meg a $0_\bullet \to \operatorname{Ker} f_\bullet \to X_\bullet \to Y_\bullet \to 0_\bullet$ *rövid egzakt sorozathoz tartozó hosszú egzakt sorozatot!*