1. *A következő részfeladatok segítségével bizonyítsuk be, hogy* Mod-R*-ben minden projektív modulus lapos!*

a) Lássuk be, hogy a $-\otimes M$ *funktor felcserélhető a direkt összeggel (a végtelen direkt összeggel is).*

b) Bizonyítsuk be, hogy lapos modulusok tetszőleges direkt összege és direkt összeadandója is lapos.

c) Mutassuk meg, hogy az $_RR$ *reguláris modulus lapos.*

2. *Bizonyítsuk be, hogy az Abel-csoportok kategóriájában nem laposak azok a csoportok, amelyek nem torziómentesek: mutassuk meg, hogy ha* G*-nek van* p *rendű eleme valamely* p*-re, akkor a* $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z}$ *monomorfizmusnak a* $- \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} G$ *funktornál vett képe nem monomorfizmus.*

3. *Számítsuk ki* $\mathrm{Ext}^n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ *értékét minden* n*-re a derivált funktor definíciójából, illetve a* $0 \to K \to P_0 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ *rövid egzakt sorozathoz rendelt hosszú egzakt sorozatból* Mod-$\mathbb{Z}$*-ben!*

Megoldás: A $\mathbb{Z}_2$ projektív felodása $\mathbb{Z}$ fölött:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1 : 1 \mapsto 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0,$$

a csonkolt projektív feloldása

$$P_\bullet : \quad 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \to 0,$$

és ennek a képe az $F = \mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z}_2)$ funktornál

$$F(P_\bullet) : \quad 0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{F(d_1)} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \to 0$$

(a bal oldali tartozik a 0. taghoz, mivel a funktor kontravariáns). A $\mathrm{Hom}(P_0, \mathbb{Z}_2) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ generátoreleme $\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha : 1 \mapsto 1} \mathbb{Z}_2$, és ennek a képe $F(d_1)$-nél $F(d_1)\alpha : 1 \mapsto 2 \mapsto 2 = 0$. Tehát $F(d_1) = 0$, és így $\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = H^0(F(P_\bullet)) = \mathbb{Z}_2/0 \cong \mathbb{Z}_2$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = H^1(F(P_\bullet)) = \mathbb{Z}_2/0 \cong \mathbb{Z}_2$, a többi $\mathrm{Ext}^n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ pedig 0.

Másképp: használjuk a $\mathbb{Z}_2$ projektív feloldásának első lépéséből a $0 \to K \to P_0 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$, azaz $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ rövid egzakt sorozatot, és írjuk fel erre a $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z}_2)$ funktor deriváltfunktorainak hosszú egzakt sorozatát. Ebben minden $n \geq 2$-re az $\mathrm{Ext}^n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ tagot két nulla tag fogja közre (mivel itt K és P_0 is projektív), így ezek az Ext-ek mind nullák, csak az elején marad négy tag:

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_1) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \to 0.$$

A Hom tagokról könnyen látható, hogy mindegyik $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf (és így $\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ is megvan), tehát

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha_0} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha_1} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha_2} \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \to 0$$

egzakt. α_0 injektív, és az elemszámok miatt szürjektív is, tehát $\mathrm{Im}\, \alpha_0 = \mathrm{Ker}\, \alpha_1 = \mathbb{Z}_2 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}\, \alpha_2 = 0$, vagyis α_2 injektív és szürjektív is, így $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.

4. *a) Legyen* $0 \to K_1 \to P_0 \to M \to 0$ *egzakt, és* P_0 *projektív. Bizonyítsuk be, hogy* $0 \to \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(P_0,N) \to \mathrm{Hom}(K_1,N) \to \mathrm{Ext}^1(M,N) \to 0$ *egzakt.*

b) Legyen $0 \to K_{n-1} \to P_{n-2} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ *egzakt, és tegyük fel, hogy itt* P_i *projektív minden* i*-re. Bizonyítsuk be, hogy* $\mathrm{Ext}^n(M,N) \cong \mathrm{Ext}^1(K_{n-1},N)$*.*

Megoldás:

a) A $\mathrm{Hom}(-,N)$ deriváltfunktorainak hosszú egzakt sorozatában $\mathrm{Ext}^1(P_0,N)=0$, mivel P_0 projektív, így a sorozat eleje

$$0 \to \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(P_0,N) \to \mathrm{Hom}(K_1,N) \to \mathrm{Ext}^1(M,N) \to 0.$$

b) Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. M-et tekinthetjük a 0. magnak, tehát $n=1$-re nyilván igaz. Tegyük fel, hogy n-re teljesül. Ekkor a $\mathrm{Hom}(-,N)$ derivált-funktorainak a $0 \to K_1 \to P_0 \to M \to 0$ rövid egzakt sorozatból kapott hosszú egzakt sorozatában

$$0 = \mathrm{Ext}^n(P_0,N) \to \mathrm{Ext}^n(K_1,N) \to \mathrm{Ext}^{n+1}(M,N) \to \mathrm{Ext}^{n+1}(P_0,N) = 0,$$

mivel P_0 projektív, és így $\mathrm{Ext}^{n+1}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^n(K_1,N)$. Az utóbbi pedig az indukciós feltevés szerint izomorf $\mathrm{Ext}^1(K_n,N)$-nel, mivel K_n a K_1 projektív feloldásának $(n-1)$-edik magja.

5. *Tegyük fel, hogy az A gráfalgebra reguláris modulusának Loewy-diagramja* $A_A = \begin{smallmatrix} &1& \\ &2& \\ 1&&3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}$.

a) Határozzuk meg $\mathrm{Ext}^3_A(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix})$ *dimenzióját.*

b) Számoljuk ki $\dim \mathrm{Ext}^3_A(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$*-et.*

c) Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$*-re létezik* $k > n$*, hogy* $\dim \mathrm{Ext}^k_A(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \neq 0$*.*

Megoldás: a) Számítsuk ki az ${\scriptstyle 1}$ projektív feloldásában a 2. magot:

$$0 \to {\scriptstyle 4} \to \begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} &1& \\ &2& \\ 1&&3 \end{smallmatrix} \to {\scriptstyle 1} \to 0.$$

A 4.b) feladat szerint $\mathrm{Ext}^3(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}) \cong \mathrm{Ext}^1(\,{\scriptstyle 4}\,, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix})$.

A ${\scriptstyle 4}$ projektív feloldásának első lépése:

$$0 \to {\scriptstyle 1} \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix} \to {\scriptstyle 4} \to 0.$$

A 4.a) alapján

$$0 \to \mathrm{Hom}(\,{\scriptstyle 4}\,, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(\,{\scriptstyle 4}\,, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to 0$$

egzakt, és a három Hom tag dimenziója rendre $0,1,1$, tehát a 6/3. feladat szerint $\dim \mathrm{Ext}^1(\,{\scriptstyle 4}\,, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}) = 1-1+0 = 0$

b) Ugyanazokat a projektív feloldásokat használjuk, mint az a) részben, csak a $\mathrm{Hom}(-, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$ funktort alkalmazzuk. Itt is azt kapjuk, hogy $\mathrm{Ext}^3(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \cong \mathrm{Ext}^1(\,{\scriptstyle 4}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$, és a

$$0 \to \mathrm{Hom}(\,{\scriptstyle 4}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(\,{\scriptstyle 4}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to 0$$

egzakt sorozatból $\dim \mathrm{Ext}^1(\,{\scriptstyle 4}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) = 1-0+0 = 1$.

c) A

$$0 \to {\scriptstyle 1} \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \\ &&4 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} &1& \\ &2& \\ 1&&3 \end{smallmatrix} \to {\scriptstyle 1} \to 0$$

egzakt sorozatból a 4.b) feladat alapján következik, hogy $\mathrm{Ext}^{k+3}(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \cong \mathrm{Ext}^k(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$, ha $k \geq 1$. De tudjuk, hogy $\mathrm{Ext}^3(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \neq 0$, így tetszőleges i-re $\mathrm{Ext}^{3i}(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \cong \mathrm{Ext}^3(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \neq 0$.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy egy additív kovariáns funktor akkor és csak akkor visz minden rövid egzakt sorozatot jobbról egzaktba* ($0 \to X \to Y \to Z \to 0$ *egzakt* $\Rightarrow F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ *egzakt*)*, ha minden egzakt* $X \to Y \to Z \to 0$ *sorozatra az* $F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ *sorozat egzakt.*

Hf2. *Számítsuk ki* $\mathrm{Ext}^n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ *értékét* Mod-$\mathbb{Z}_4$*-ben minden* n*-re!*