1. Legyen $M \in \text{Mod-}R$, azaz M jobb oldali R-modulus, B balideálja, J jobbideálja R-nek, $a \in M$ és U, V részmodulusok M-ben. Az alábbiak közül melyikek lesznek feltétlenül részmodulusai M-nek? (Az összegek komplexusösszegeket, a szorzatok a komplexusszorzat elemeiből alkotott összegek hamazát jelentik, és $\mathrm{Ann}_M(H) = \{\, m \in M \mid mh = 0 \ \forall h \in H \,\}$ a $H \subseteq R$ részhalmaz annullátora M-ben.)

a) aR b) aB c) aJ d) $U \cap V$ e) $U \cup V$
f) $U + V$ g) $\mathrm{Ann}_M(B)$ h) $\mathrm{Ann}_M(J)$ i) UB j) UJ.

2. a) Legyen $1 \in S \leq R$. Bizonyítsuk be, hogy minden R-modulus S-modulus is, de fordítva nem igaz.
b) Legyen $I \lhd R$. Mi a kapcsolat az R-modulusok és az R/I-modulusok között?

3. Hány részmodulusa van az alábbi modulusoknak, és azok hány izomorfiaosztályba tartoznak?
a) $\mathbb{R}^4$ mint $\mathbb{R}$-modulus.
b) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$ mint $\mathbb{Z}$-modulus.
c) A 2-elemű test fölötti 3×3-as mátrixok gyűrűje, $\mathbb{F}_2^{3\times 3}$, önmaga fölött.

4. Legyen A algebra a K test fölött, és legyen M modulus A fölött.
a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\dim_K M < \infty$, akkor M végesen generált mint modulus, de fordítva nem igaz a következtetés.
b) Lássuk be, hogy ha $\dim_K A < \infty$, és M végesen generált modulus A fölött, akkor $\dim_K M < \infty$.

5. Tekintsük a $K[x]$ polinomgyűrű fölötti n-dimenziós modulusokat, ahol K test. A modulus egy bázisát rögzítve feleltessük meg a modulusnak azt a mátrixot, amely az x hatását adja meg az adott bázisban.
a) Mikor lesz ez a modulus egyszerű?
b) Mit jelent a mátrixokra nézve az, hogy két modulus izomorf?
c) Megadhatjuk-e ezeket a modulusokat természetes módon véges dimenziós algebra ($K[x]$ alkalmas faktoralgebrája) fölötti modulusként is?
d) Írjuk le az összes 2-dimenziós modulust $\mathbb{C}[x]$ fölött izomorfia erejéig!

6. Az alább felsorolt modulusosztályok közül melyikekben bontható minden modulus ciklikusok, illetve egyszerűek direkt összegére? Ha az egész osztályra nem igaz, milyen részosztályra teljesül a felbonthatóság?
a) vektorterek
b) ferdetest fölötti modulusok
c) $\mathbb{Z}$-modulusok

Hf1. Legyen $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ és $R = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$. Bizonyítsuk be, hogy M jobbmodulus R fölött (a természetes mátrixszorzással), és hogy M-nek egyetlen valódi részmodulusa van.

Hf2. Legyen $U \leq M \in \text{Mod-}R$, és tegyük fel, hogy van olyan $\varphi : M \to U$ homomorfizmus, hogy $\varphi|_U = \mathrm{id}_U$. Bizonyítsuk be, hogy $W = \{\, m - m\varphi \mid m \in M \,\} \leq M$, és $M = U \oplus W$.