1. Lássuk be, hogy

a) ha ${}_S X_R$ és ${}_T Y_R$ bimodulusok, akkor $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ egy $T-S$-bimodulus,

b) és ha ${}_R X_S$ és ${}_R Y_T$ bimodulusok, akkor $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ egy $S-T$-bimodulus.

2. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathrm{Hom}_R(\oplus M_i, N) \cong \prod \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$$
$$\mathrm{Hom}_R(M, \prod N_i) \cong \prod \mathrm{Hom}_R(M, N_i).$$

3. Bizonyítsuk be hogy $\mathrm{End}(R_R) \cong R$ mint gyűrűk, ha az endomorfizmusokat balról írjuk!

4. Számítsuk ki a következő tenzorszorzatokat:

$$\mathbb{Z}_2 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}_3, \qquad \mathbb{Z}_2 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}_4, \qquad \mathbb{Z}_2 \underset{\mathbb{Z}_4}{\otimes} \mathbb{Z}_4, \qquad M \underset{R}{\otimes} R/I, \text{ ahol } M \in \text{Mod-}R,\ I \lhd R.$$

5. Legyenek ${}_S M_R$ és ${}_R N_T$ bimodulusok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $M \underset{R}{\otimes} N$ egy S-T-bimodulus az $s(m \otimes n) := sm \otimes n$ és $(m \otimes n)t := m \otimes nt$ hatások kiterjesztésével.

6. Legyenek $S \le R$ gyűrűk, $M \in \text{Mod-}S$, $U_R = M \underset{S}{\otimes} R$, és $\alpha \in \mathrm{Hom}_S(M,U)$, $\alpha : m \mapsto m \otimes 1$. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $V \in \text{Mod-}R$-re bármely $\beta \in \mathrm{Hom}_S(M,V)$ homomorfizmus átvezethető az U-n, azaz van olyan $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(U,V)$, hogy $\beta = \alpha\varphi$.

Hf1. Legyen K test és $R = K^{n\times n}$ a K fölötti $n \times n$-es mátrixok algebrája. Bizonyítsuk be, hogy a $H := \mathrm{Hom}_K(R,K)$ vektortér egyúttal R-R-bimodulus az $r(a\varphi) := (ra)\varphi$, $r(\varphi b) := (br)\varphi$ hatással (a bizonyítás egy részéhez felhasználhatjuk az 1. feladat állításait is). Továbbá, ha τ a mátrixokhoz a nyomukat rendelő leképezés, akkor $\tau \in H$, és $a\tau = \tau a$ minden $a \in R$-re!

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$ mint (additív) Abel-csoport.