Homologikus algebra **3. feladatsor** *2023 ősz*

1. Bizonyítsuk be, hogy a kategóriaelméleti szorzat és koszorzat izomorfizmus erejéig egyértelmű!

M szorzat:
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi_i"] & M_i \\ \forall U \arrow[u, dashed, "\exists!\,\varphi"] \arrow[ur, "\alpha_i"'] & \end{tikzcd}$$

N koszorzat:
$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, dashed, "\exists!\,\varphi"'] & M_i \arrow[l, "\iota_i"'] \arrow[dl, "\alpha_i"] \\ \forall U & \end{tikzcd}$$

2. Bizonyítsuk be, hogy az U_i modulusok kategóriaelméleti szorzata $\prod U_i$, koszorzata pedig $\oplus U_i$.

3. Mi a $\mathbb{Z}$ önmagával vett koszorzata, ha az Abel-csoportok, illetve a csoportok kategóriájában nézzük? És $\mathbb{Z}_2$ önmagával vett koszorzata?

4. Bizonyítsuk be, hogy
a) ha α és β epimorfizmus, akkor $\alpha\beta$ is az;
b) ha α és β monomorfizmus, akkor $\alpha\beta$ is az;
c) ha $\alpha\beta$ epimorfizmus, akkor β is az;
d) ha $\alpha\beta$ monomorfizmus, akkor α is az!

5. Legyen $\mathcal{K}$ az a kategória, amelynek egyetlen a objektuma van, és $S = \mathrm{Hom}(a,a)$ egy véges, egységelemes félcsoport, amelyben $1 := \mathrm{id}_a$. Melyek lesznek $\mathrm{Hom}(a,a)$-ban az epimorfizmusok és a monomorfizmusok?

6. Bizonyítsuk be, hogy projektív modulusok direkt összege projektív, és injektív modulusok direkt szorzata injektív! (Használjuk a kategóriaelméleti koszorzat és szorzat fogalmát!)

7. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}$ mint Abel-csoport nem projektív.

8. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}_n$ injektív mint önmaga fölötti modulus (használhatjuk a Baer-kritériumot)!

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy az egységelemes gyűrűk kategóriájában a $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ beágyazás epimorfizmus, bár nem szürjektív!

Hf2. Legyen $\mathcal{K}$ az a kategória, amelynek egyetlen objektuma a, és $\mathrm{Hom}(a,a) = S$ egységelemes félcsoport. Injektív objektum-e az a, ha
a) S csoport;
b) $S = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots\} \cong (\mathbb{Z}_{\geq 0}, +)$;
c) $S = \{1, \alpha, \alpha^2\}$ háromelemű félcsoport, ahol $\alpha^3 = \alpha^2$.