1. Legyen R nem feltétlenül egységelemes gyűrű, és tegyük fel, hogy az $I \lhd R$ ideál mint gyűrű egységelemes. Bizonyítsuk be, hogy ekkor I az R-nek mint gyűrűnek direkt összeadandója!

2. Bontsuk fel a KC_3 csoportalgebrát direkt felbonthatatlan modulusok direkt összegére, ha $K = \mathbb{Z}_2$, illetve $\mathbb{Z}_3$.

3. Legyen $A = K^{n\times n}$ a teljes mátrixalgebra.
 a) Bizonyítsuk be, hogy $E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}$ páronként ortogonális idempotensek teljes rendszere!
 b) Bizonyítsuk be, hogy az $A_A = \oplus_{i=1}^{n} E_{ii}A$ felbontás tagjai egyszerű, egymással izomorf modulusok!

4. Bizonyítsuk be, hogy ha Γ véges gráf n csúccsal, és e_i az i. csúcsból kiinduló 0 hosszúságú út, akkor a $K\Gamma$ gráfalgebrában az $e_iK\Gamma$ részmodulusok direkt felbonthatatlanok (tehát e_i nem bontható fel $e_iK\Gamma$-beli ortogonális idempotensek összegére), de $e_iK\Gamma$-ban előfordulhat a 0-n és e_i-n kívül más idempotens is.

5. Adjuk meg az A algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha $A = K\Gamma/I$, ahol Γ: $\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$ és
 a) $I = (\alpha\gamma, \gamma^2, \gamma\beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta)$;
 b) $I = (\alpha\gamma^2, \gamma^2 - \beta\alpha, \alpha\beta)$.

6. Lehet-e az alábbi egy $K\Gamma/I$ algebra reguláris jobbmodulusának Loewy-diagramja? Ha igen, adjuk meg a Γ gráfot és az I ideálnak egy generátorrendszerét!

a) $\begin{array}{c}1\\2\\2\\2\end{array} \oplus \begin{array}{c}2\\2\end{array}$ b) $\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 2 \\ & 2 & \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{array}$ c) $\begin{array}{c}1\\2\end{array} \oplus \begin{array}{c}2\\3\end{array} \oplus 3$

Hf1. Legyen $e \in R$ idempotens elem. Bizonyítsuk be, hogy eR pontosan akkor direkt felbonthatatlan direkt összeadandója R_R-nek, ha nincs eRe-ben a 0-n és e-n kívül más idempotens elem.

Hf2. Írjuk fel az $A = K\Gamma/I$ algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha

$$\Gamma : 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\delta}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} 3, \qquad I = (\alpha\beta, \beta\alpha - \gamma\delta, \delta\beta, \delta\gamma).$$