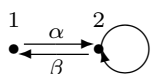


- Legyen R nem feltétlenül egységelemes gyűrű, és tegyük fel, hogy az $I \triangleleft R$ ideál mint gyűrű egységelemes. Bizonyítsuk be, hogy ekkor I az R -nek mint gyűrűnek direkt összeadandója!
- Bontsuk fel a KC_3 csoportalgebrát direkt felbonthatatlan modulusok direkt összegére, ha $K = \mathbb{Z}_2$, illetve \mathbb{Z}_3 .
- Legyen $A = K^{n \times n}$ a teljes mátrixalgebra.
 - Bizonyítsuk be, hogy $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}$ páronként ortogonális idempotensek teljes rendszere!
 - Bizonyítsuk be, hogy az $A_A = \bigoplus_{i=1}^n E_{ii}A$ felbontás tagjai egyszerű, egymással izomorf modulusok!

- Bizonyítsuk be, hogy ha Γ véges gráf n csúccsal, és e_i az i . csúcsból kiinduló 0 hosszúságú út, akkor a $K\Gamma$ gráfalgebrában az $e_i K\Gamma$ részmodulusok direkt felbonthatatlanok (tehát e_i nem bontható fel $e_i K\Gamma$ -beli ortogonális idempotensek összegére), de $e_i K\Gamma$ -ban előfordulhat a 0-n és e_i -n kívül más idempotens is.

- Adjuk meg az A algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját,

ha $A = K\Gamma/I$, ahol Γ :  és

a) $I = (\alpha\gamma, \gamma^2, \gamma\beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta)$;

b) $I = (\alpha\gamma^2, \gamma^2 - \beta\alpha, \alpha\beta)$.

- Lehet-e az alábbi egy $K\Gamma/I$ algebra reguláris jobbmodulusának Loewy-diagramja? Ha igen, adjuk meg a Γ gráfot és az I ideálnak egy generátorrendszerét!

a) $\begin{matrix} 1 \\ 2 \oplus 2 \\ 2 \end{matrix}$

b) $\begin{matrix} 1 \\ 1 \ 2 \oplus 1 \ 2 \\ 2 \end{matrix}$

c) $\begin{matrix} 1 \\ 2 \oplus 3 \oplus 3 \\ 3 \end{matrix}$

Hf1. Legyen $e \in R$ idempotens elem. Bizonyítsuk be, hogy eR pontosan akkor direkt felbonthatatlan direkt összeadandója R_R -nek, ha nincs eRe -ben a 0-n és e -n kívül más idempotens elem.

Hf2. Írjuk fel az $A = K\Gamma/I$ algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha

$$\Gamma : 1 \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{matrix} 2 \begin{matrix} \xrightarrow{\gamma} \\ \xleftarrow{\delta} \end{matrix} 3, \quad I = (\alpha\beta, \beta\alpha - \gamma\delta, \delta\beta, \delta\gamma).$$