

1. Legyen $A = K\Gamma/I$ az algebra, amelynek reguláris jobbmodulusa $A_A = \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}$. Határozzuk meg az $\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 2 \end{smallmatrix}$ modulus összes részmodulusát és az ezekkel vett faktorainak Loewy-diagramját!
2. Legyen $A_A = \begin{smallmatrix} 1 & \\ & 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 & \\ & 1 \end{smallmatrix}$. Hány dimenziós az A algebra fölött a $\text{Hom}(\begin{smallmatrix} 2 & \\ & 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{smallmatrix})$, illetve a $\text{Hom}(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 & \\ & 1 \end{smallmatrix})$ vektortér?
3. A következők közül melyik definiál funktort a morfizmusokon való természetes hatással együtt?
 - a) $G \mapsto G'$ a csoportok kategóriájában;
 - b) $G \mapsto Z(G)$ a csoportok kategóriájában;
 - c) $A \mapsto t(A)$ az Abel-csoportok kategóriájában, ahol $t(A)$ az A torziórészcsoportha, azaz véges rendű elemeinek csoportja.
4. Bizonyítsuk be, hogy $M \in R\text{-Mod}$ -ra $X \mapsto X \otimes_R M$ kovariáns funktor $\text{Mod-}R$ -ből az Abel-csoportok kategóriájába.
5. Legyen A az a gráfalgebra, amelyre a reguláris modulus Loewy-diagramja

$$A_A = \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \\ & & & 2 \\ & & & & 3 \\ & & & & & 2 \end{smallmatrix}.$$

Tekintsük a $0 \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 & \\ & 1 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 & \\ & 1 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 & \\ & 2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 & \\ & 2 \end{smallmatrix} \rightarrow 1 \rightarrow 0$ sorozatot, ahol mindegyik morfizmus a legnagyobb rangú olyan homomorfizmus (azaz a képe vektortérként maximális dimenziós), ami a Loewy-diagramokban használt báziselemeket báziselemekbe vagy 0-ba viszi. Határozzuk meg a sorozat homológiáit!

- Hf1.** Legyen A a 2. feladat algebrája, és $M = \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}$, $N = \begin{smallmatrix} 1 & \\ & 2 \end{smallmatrix}$ modulusok A fölött (a ferdén egymás alatt levő számok vannak összekötve nyíllal). Határozzuk meg a $\text{Hom}(M, N)$ és $\text{Hom}(N, M)$ vektorterek dimenzióját, és a lehetséges nemnulla homomorfizmusok magjának Loewy-diagramját!
- Hf2.** Határozzuk meg az összes olyan α, β homomorfizmust, amelyre a $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ sorozat féligzakt, és adjuk meg minden esetben a homológiákat!