1. Legyen $\xi :\ 0 \to X \overset{\alpha}{\to} Y \overset{\beta}{\to} Z \to 0$ sorozat mod-R-ben. Bizonyítsuk be, hogy a következő állítások ekvivalensek:

(i) ξ egzakt, és $\operatorname{Im}\alpha$ direkt összeadandó Y-ban (így $Y \cong X \oplus Z$);

(ii) ξ egzakt, és $\exists \alpha' : Y \to X$, hogy $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$;

(iii) ξ egzakt, és $\exists \beta' : Z \to Y$, hogy $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$;

(iv) $\exists \alpha : Y \to X$ és $\beta' : Z \to Y$, hogy $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$, $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$, $\alpha\beta = 0$, $\beta'\alpha' = 0$, és $\alpha'\alpha + \beta\beta' = \mathrm{id}_Y$.

Ilyenkor a ξ sorozatot *felhasadó* rövid egzakt sorozatnak hívjuk.

2. Legyen $M_\bullet : 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{Z}_2 \to 0$ egzakt sorozat, és $F : \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_2, -)$, $G : \operatorname{Hom}(-, \mathbb{Z}_2)$ funktorok. Bizonyítsuk be, hogy $F_\bullet(M_\bullet)$ és $G_\bullet(M_\bullet)$ egyike sem egzakt. Melyik láncszemnél romlik el az egzaktság?

3. Legyen $0 \to V_1 \to \cdots \to V_m \to 0$ vektorterek egzakt sorozata. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\sum\limits_k \dim V_{2k} = \sum\limits_k \dim V_{2k+1}$.

4. (3×3-lemma) Tegyük fel, hogy az alábbi kommutatív diagram sorai egzaktak.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & X' & \to & Y' & \to & Z' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & X & \to & Y & \to & Z & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & X'' & \to & Y'' & \to & Z'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

a) Bizonyítsuk be, hogy ha a középső oszlop egzakt, akkor első oszlop akkor és csak akkor egzakt, ha a harmadik az.

b) Mutassuk meg, hogy az első és utolsó oszlop egzaktságából együtt sem következik, hogy a középső oszlop egzakt.

5. Tekintsük az $f_\bullet$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \to & 0 & \to & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{1 \mapsto 4} & \mathbb{Z}_8 & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \to & 0 & \to & \cdots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\cdots & \to & 0 & \to & \mathbb{Z}_8 & \xrightarrow{1 \mapsto 2} & \mathbb{Z}_8 & \xrightarrow{1 \mapsto 4} & \mathbb{Z}_8 & \to & 0 & \to & \cdots
\end{array}$$

láncleképezést, ahol a felső lánckomplexus $X_\bullet$, az alsó $Y_\bullet$, és a lefelé menő nyilak ($f_\bullet$) természetes beágyazások.

Határozzuk meg a $0_\bullet \to X_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} Y_\bullet \to \operatorname{Coker} f_\bullet \to 0_\bullet$ rövid egzakt sorozathoz tartozó hosszú egzakt sorozatot!

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy egy $0 \to X \overset{\alpha}{\to} Y \overset{\beta}{\to} Z \to 0$ féligegzakt sorozat akkor és csak akkor homotóp a csupa-0 sorozattal, ha felhasadó egzakt.

Hf2. Legyen $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$, és tekintsük a

$$0 \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & & 2 \\ 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \to 0$$

egzakt sorozatot. Mutassuk meg, hogy a $\operatorname{Hom}(-, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix})$ funktorral vett képe nem egzakt. (Útmutatás: mennyi $\dim_K \operatorname{Hom}(M_i, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix})$ a szereplő M_i modulusokra?)