

1. Tekintsük az  $f_\bullet$ :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow \cdot 4 & & \downarrow \cdot 4 & & \downarrow \cdot 4 & & \downarrow & & \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z}_{16} & \xrightarrow{\cdot 4} & \mathbb{Z}_8 & \longrightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

láncképezést, ahol a felső lánckomplexus  $X_\bullet$ , az alsó  $Y_\bullet$ .

Határozzuk meg a  $0_\bullet \rightarrow X_\bullet \rightarrow Y_\bullet \rightarrow \text{Coker } f_\bullet \rightarrow 0_\bullet$  rövid egzakt sorozathoz tartozó hosszú egzakt sorozatot!

2. Számítsuk ki az

- $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus 3$  reguláris modulusú algebra fölötti  $X = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$  és  $Y = 2$  modulus projektív feloldását;
- az  $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$  reguláris modulusú algebra fölötti  $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$  modulus projektív feloldását;
- a  $\mathbb{Z}_2$  Abel-csoport injektív feloldását.

3. Számítsuk ki a 2.a) feladat  $X$  modulusára a csonkolt projektív feloldásnak a  $\text{Hom}(-, \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix})$  kontravariáns funktornál vett képét, és a kapott komplexus kohomológiáinak dimenzióját!

4. (5-lemma) Tegyük fel, hogy a következő kommutatív diagram sorai egzaktak.

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & D & \rightarrow & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\ A' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' & \rightarrow & D' & \rightarrow & E' \end{array}$$

Mutassuk meg, hogy

- ha  $\alpha$  epimorfizmus, és  $\beta$  és  $\delta$  monomorfizmusok, akkor  $\gamma$  monomorfizmus;
- ha  $\varepsilon$  monomorfizmus, és  $\beta$  és  $\delta$  epimorfizmusok, akkor  $\gamma$  epimorfizmus.
- ha  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  és  $\varepsilon$  izomorfizmusok, akkor  $\gamma$  is izomorfizmus.

**Hf1.** Bizonyítsuk be a komplexusok  $0_\bullet \rightarrow X_\bullet \rightarrow Y_\bullet \rightarrow Z_\bullet \rightarrow 0_\bullet$  rövid egzakt sorozatához tartozó hosszú egzakt sorozatban az egzaktságot  $H_n(Y_\bullet)$ -nál!

**Hf2.** Tekintsük az  $f_\bullet$ :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \rightarrow & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\cdot} & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\cdot} & \mathbb{Z}_4 & \rightarrow & \cdots \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow \text{id} & & \downarrow 0 & & \downarrow \text{id} & & \downarrow 0 & & \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

láncképezést, ahol a felső lánckomplexus  $X_\bullet$ , az alsó  $Y_\bullet$ .

Határozzuk meg a  $0_\bullet \rightarrow \text{Ker } f_\bullet \rightarrow X_\bullet \rightarrow Y_\bullet \rightarrow 0_\bullet$  rövid egzakt sorozathoz tartozó hosszú egzakt sorozatot!