1. a) Legyen $X, Y \in$ Mod-R and $M \in R$-Mod, továbbá $X \xrightarrow{\alpha} Y$ morfizmus Mod-R-ben. Bizonyítsuk be, hogy az $x \otimes m \mapsto x\alpha \otimes m$ leképezés additív kiterjesztése, $X \underset{R}{\otimes} M \xrightarrow{\alpha \otimes 1} Y \underset{R}{\otimes} M$ morfizmus $\mathcal{A}b$-ban.

b) Bizonyítsuk be, hogy $F = - \underset{R}{\otimes} M$ az a) részben megadott hatással jobbegzakt, additív, kovariáns funktor. (Útmutatás a $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ rövid egzakt sorozatra az $X \otimes M \xrightarrow{\alpha \otimes 1} Y \otimes M \xrightarrow{\beta \otimes 1} Z \otimes M \to 0$ egzaktságának belátásához $Y \otimes M$-nél: mutassuk meg, hogy $\beta \otimes 1$ indukál egy jól definiált $(Y \otimes M)/\operatorname{Im}(\alpha \otimes 1) \xrightarrow{\beta'} Z \otimes M$ morfizmust, és β'-nek van inverze.)

2. A következő részfeladatok segítségével bizonyítsuk be, hogy Mod-R-ben minden projektív modulus lapos!

a) Lássuk be, hogy a $- \otimes M$ funktor felcserélhető a direkt összeggel (a végtelen direkt összeggel is).

b) Bizonyítsuk be, hogy lapos modulusok tetszőleges direkt összege és direkt összeadandója is lapos.

c) Mutassuk meg, hogy az ${}_R R$ reguláris modulus lapos.

3. Bizonyítsuk be, hogy az Abel-csoportok kategóriájában nem laposak azok a csoportok, amelyek nem torziómentesek: mutassuk meg, hogy ha G-nek van p rendű eleme, valamely p-re, akkor a $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z}$ monomorfizmusnak a $- \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} G$ funktornál vett képe nem monomorfizmus.

4. Számítsuk ki $\operatorname{Ext}^n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ értékét minden n-re a derivált funktor definíciójából, illetve a $0 \to K \to P_0 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ rövid egzakt sorozathoz rendelt hosszú egzakt sorozatból Mod-$\mathbb{Z}$-ben!

5. a) Legyen $0 \to K_1 \to P_0 \to M \to 0$ egzakt, és P_0 projektív. Bizonyítsuk be, hogy $0 \to \operatorname{Hom}(M, N) \to \operatorname{Hom}(P_0, N) \to \operatorname{Hom}(K_1, N) \to \operatorname{Ext}^1(M, N) \to 0$ egzakt.

b) Legyen $0 \to K_{n-1} \to P_{n-2} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ egzakt, és tegyük fel, hogy itt P_i projektív minden i-re. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{Ext}^n(M, N) \cong \operatorname{Ext}^1(K_{n-1}, N)$.

6. Tegyük fel, hogy az A gráfalgebra reguláris modulusának Loewy-diagramja
$A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & & 4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}$.

a) Határozzuk meg $\operatorname{Ext}^3_A(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix})$ dimenzióját.

b) Számoljuk ki $\dim \operatorname{Ext}^3_A(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$-et.

c) Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re létezik $k > n$, hogy $\dim \operatorname{Ext}^k_A(\,{\scriptstyle 1}\,, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \neq 0$.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy egy additív kovariáns funktor akkor és csak akkor visz minden rövid egzakt sorozatot jobbról egzaktba ($0 \to X \to Y \to Z \to 0$ egzakt $\Rightarrow F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ egzakt), ha minden egzakt $X \to Y \to Z \to 0$ sorozatra az $F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ sorozat egzakt.

Hf2. Számítsuk ki $\operatorname{Ext}^n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ értékét Mod-$\mathbb{Z}_4$-ben minden n-re!