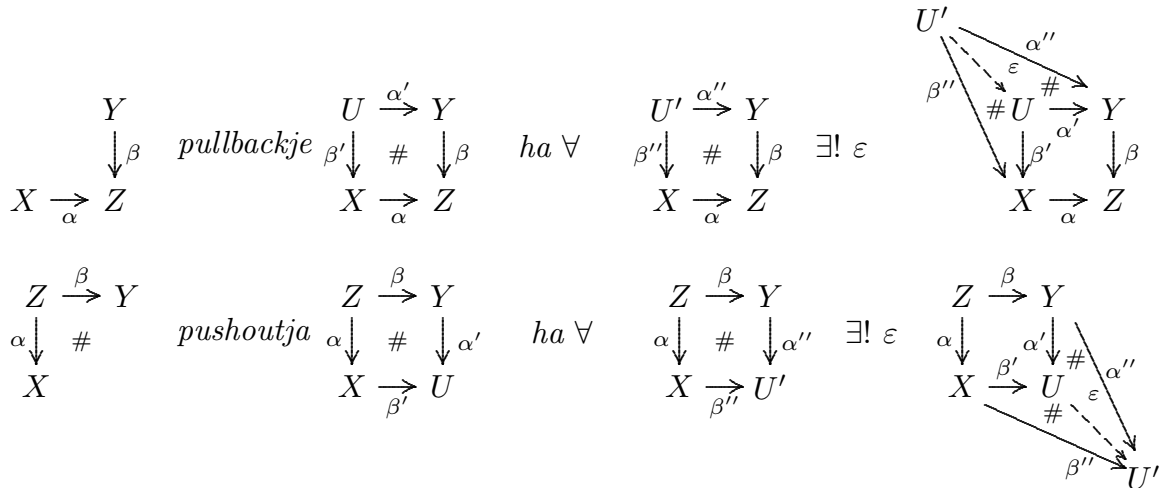


Egy kategóriában



1. Bizonyítsuk be, hogy a pullback és pushout — ha létezik — izomorfia erejéig egyértelmű, és hogy  $\text{Mod-}R$ -ben mindig létezik pullback:  $U = \{(x, y) \mid x\alpha = y\beta\} \leq X \oplus Y$  és pushout:  $U = X \oplus Y / \{(z\alpha, -z\beta) \mid z \in Z\}$ .
2. Bizonyítsuk be, hogy ha modulusok pullbackjében vagy pushoutjában  $\alpha$  vagy  $\beta$  monomorfizmus, illetve epimorfizmus, akkor a vele “párhuzamos” nyíl is ilyen!
3. Bizonyítsuk be, hogy  $\mathcal{A}b$ -ban az  $\text{Ext}^1(-, N)$  funktor kontravariáns jobbegzakt. Milyen  $N$ -re lesz egzakt?
4. Határozzuk meg az  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$  csoportot! Adjuk meg az elemeinek megfelelő bővítéseket  $\text{Ex}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$ -ben!
5. Legyen  $A$  véges dimenziós  $K$ -algebra, és  $M, N \in \text{mod-}A$ . Bizonyítsuk be, hogy ha a  $\xi$  és  $\eta$  bővítések lineárisan összefüggők, de egyik sem nulla  $\text{Ex}(M, N)$ -ben (azaz nem felhasadók), akkor a középső tagjuk izomorf!
6. Tekintsük azt az  $A$  gráfalgebrát, amelynek jobbrekuláris modulusa  $A_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

Határozzuk meg az  $\text{Ext}_A^1(1, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix})$  vektortér dimenzióját, és adjunk meg a vele izomorf  $\text{Ex}_A(1, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix})$  térben egy bázist. Ciklikus lesz-e ez mint  $\text{End}(1)$ -, illetve mint  $\text{End}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix})$ -modulus?

**Hf1.** Bizonyítsuk be a 2. feladat állítását arra az esetre, amikor egy pullbackban, illetve pushoutban  $\alpha$  epimorfizmus! (Használjuk az 1. feladatban megadott konstrukciókat!)

**Hf2.** Legyen

$$\xi : 0 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow 0$$

az a bővítés  $\text{Ex}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$ -ben, amelynél a monomorfizmus az 1 elemet  $(1, 2)$ -be képezi, az epimorfizmus pedig  $(0, 1)$ -et 1-be,  $(1, 0)$ -t pedig 2-be. Határozzuk meg az  $f\xi$  és  $\xi g$  bővítésekben a középső tagot, ha  $f : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$  és  $g : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  nemnulla homomorfizmusok!