1. Legyen $f, f_1, f_2 : X \to Y$, és $\xi :\ 0 \to N \to L \to M \to 0$ egy bővítés. Bizonyítsuk be, hogy

a) $f\Delta_Y = \Delta_X(f \oplus f)$, b) $\nabla_X f = (f \oplus f)\nabla_Y$,

c) $f_1 + f_2 = \Delta_X(f_1 \oplus f_2)\nabla_Y$,

d) $\nabla_M \xi = (\xi \oplus \xi)\nabla_N$, e) $\xi\Delta_N = \Delta_M(\xi \oplus \xi)$.

2. Az 1. feladat összefüggéseit felhasználva bizonyítsuk be, hogy $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(M', M)$-re, $g, g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}(N, N')$-re és $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathrm{Ex}(M, N)$-re

$(f_1 + f_2)\xi = f_1\xi + f_2\xi$,
$\xi(g_1 + g_2) = \xi g_1 + \xi g_2$,
$f(\xi_1 + \xi_2) = f\xi_1 + f\xi_2$,
$(\xi_1 + \xi_2)g = \xi_1 g + \xi_2 g$.

3. Lássuk be, hogy bármely $\xi \in \mathrm{Ex}(M, N)$-re $0\xi = \xi 0 = 0$, ahol az utolsó 0 a felhasadó bővítések ekvivalenciaosztálya $\mathrm{Ex}(M, N)$-ben.

4. Legyen $\eta :\ 0 \to K \to P \to M \to 0$ egzakt, ahol P projektív. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathrm{Hom}(K, N) \xrightarrow{\eta\cdot} \mathrm{Ex}(M, N)$ szürjektív leképezés összegtartó, és ebből azt, hogy $\mathrm{Ex}(M, N)$ Abel-csoport.

5. Legyen $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ egzakt sorozat. Az $\mathrm{Ext}(-, N)$-ek hosszú egzakt sorozatából

a) bizonyítsuk be, hogy ha a $\operatorname{pd} X$,dY és $\operatorname{pd} Z$ projektív dimenziók közül kettő véges, akkor a harmadik is;

b) $\operatorname{pd} Y \le \max(\operatorname{pd} X, \operatorname{pd} Z)$;

c) ha $\operatorname{pd} X < \operatorname{pd} Y$, akkor $\operatorname{pd} Z = \operatorname{pd} Y$.

6. Bizonyítsuk be, hogy $M \in$ mod-A akkor és csak akkor

a) projektív, ha $\mathrm{Ext}^1(M, S) = 0$ minden S egyszerű modulusra;

b) injektív, ha $\mathrm{Ext}^1(S, M) = 0$ minden S egyszerű modulusra.

7. Számítsuk ki az alábbi Loewy-diagramokhoz tartozó gráfalgebrák globális dimenzióját.

a) $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$

b) $A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ & 4 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$

8. Bizonyítsuk be, hogy a következő kovariáns funktorpárok adjungáltak.

a) $F : \mathcal{S}et \to \mathcal{G}rp$ a szabadon generálás ($F(X)$ az X halmaz által szabadon generált csoport) és $G : \mathcal{G}rp \to \mathcal{S}et$ a felejtő funktor (ami minden csoporthoz az alaphalmazát rendeli).

b) $F : \mathcal{G}rp \to K\text{-}\mathcal{A}lg$, $F(G) = KG$ csoportalgebra és
$G : K\text{-}\mathcal{A}lg \to \mathcal{G}rp$, $G(A) = \{\, u \in A \mid \exists u^{-1} \,\}$ az egységek csoportja.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy az $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$ Loewy-diagrammal megadott algebra fölött az $\begin{smallmatrix} 1 & \\ 2 & 1 \\ 2 & \end{smallmatrix}$ és az egyszerű 1 modulusok injektívek. (Használjuk a 6.b) feladatot.)

Hf2. Legyen $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ egzakt sorozat. Az $\mathrm{Ext}(-, N)$-ek hosszú egzakt sorozatából bizonyítsuk be, hogy

a) ha $\operatorname{pd} X > \operatorname{pd} Y$, akkor $\operatorname{pd} Z = \operatorname{pd} X + 1$;

b) ha $\operatorname{pd} X = \operatorname{pd} Y$, akkor $\operatorname{pd} Z \le \operatorname{pd} X + 1$.

Adjunk példát arra, hogy a b) esetben $\operatorname{pd} Z < \operatorname{pd} X + 1$ és $\operatorname{pd} Z = \operatorname{pd} X + 1$ is lehetséges.