1. *a) Legyen $X, Y \in \mathrm{Mod}\text{-}R$ and $M \in R\text{-}\mathrm{Mod}$, továbbá $X \xrightarrow{\alpha} Y$ morfizmus Mod-R-ben. Bizonyítsuk be, hogy az $x \otimes m \mapsto x\alpha \otimes m$ leképezés additív kiterjesztése, $X \underset{R}{\otimes} M \xrightarrow{\alpha \otimes 1} Y \underset{R}{\otimes} M$ morfizmus $\mathcal{A}b$-ban.*

b) Bizonyítsuk be, hogy $F = - \underset{R}{\otimes} M$ az a) részben megadott hatással jobbegzakt, additív, kovariáns funktor. (Útmutatás a $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ rövid egzakt sorozatra az $X \otimes M \xrightarrow{\alpha \otimes 1} Y \otimes M \xrightarrow{\beta \otimes 1} Z \otimes M \to 0$ egzaktságának belátásához $Y \otimes M$-nél: mutassuk meg, hogy $\beta \otimes 1$ indukál egy jól definiált $(Y \otimes M)/\operatorname{Im}(\alpha \otimes 1) \xrightarrow{\beta'} Z \otimes M$ morfizmust, és β'-nek van inverze.)

Megoldás: a) Általánosabban is igaz: ha $X \xrightarrow{\alpha} Y$ morfizmus Mod-R-ben, és $M \xrightarrow{\beta} N$ morfizmus R-Mod-ban, akkor az $x \otimes m \mapsto x\alpha \otimes m\beta$ leképezés additív kiterjesztése, $X \underset{R}{\otimes} M \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} Y \underset{R}{\otimes} N$ morfizmus $\mathcal{A}b$-ban. Könnyen látható, hogy $\varphi : X \times M \to Y \otimes N$, $(x, m) \mapsto x\alpha \otimes m\beta$ R-középlineáris:
$(x + x', m)\varphi = (x + x')\alpha \otimes m\beta = (x\alpha + x'\alpha) \otimes m\beta = (x\alpha \otimes m\beta) + (x'\alpha \otimes m\beta) = (x, m)\varphi + (x', m)\varphi$, és ugyanígy
$(x, m + m')\varphi = (x, m)\varphi + (x, m')\varphi$, továbbá
$(xr, m)\varphi = (xr)\alpha \otimes m\beta = (x\alpha)r \otimes m\beta = x \otimes r(m\beta) = x \otimes (rm)\beta = (x, rm)\varphi$, tehát φ átvezethető $X \otimes M$-en egy Abel-csoport-homomorfizmussal, és ez (x, m) képén, $x \otimes m$-en az $x\alpha \otimes m\beta$ értéket veszi föl.

b) Az a) részben bizonyított képletből könnyen látszik, hogy F kovariáns és additív. Az egzaktságból az $F(\beta)$ szürjektivitása és a féligegzaktság $F(Y)$-nál szintén következménye az $F(\alpha) = \alpha \otimes 1$ és $F(\beta) = \beta \otimes 1$ felírásnak. Azt kell csak belátni, hogy $\operatorname{Ker} F(\beta) \leq \operatorname{Im} F(\alpha)$. Legyen $U = (Y \otimes M)/\operatorname{Im}(\alpha \otimes 1)$. Mivel a megtenzorozott sorozat féligegyszerű, az útmutatásban megadott $U \xrightarrow{\beta'} Z \otimes M$ morfizmus valóban létezik. Most tekintsük a $\varphi : Z \times M \to U$, $(z, m) \mapsto (y \otimes m) + \operatorname{Im}(\alpha \otimes 1)$ leképezést, ahol $y\beta = z$. Ilyen y létezik, mert β szürjektív. Továbbá φ jól van definiálva, minthogy $z = 0$-ra $y \in \operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Im} \alpha$, azaz van olyan $x \in X$, hogy $y \otimes m \in \operatorname{Im}(\alpha \otimes 1)$, így $y \otimes m + \operatorname{Im}(\alpha \otimes 1) = \operatorname{Im}(\alpha \otimes 1)$ az U nulleleme.
Ráadásul ez a φ R-középlineáris (csak az R átemelhetőségét megmutatva: ha z-hez y-t választjuk, akkor zr-hez választhatjuk yr-t, és így $(zr, m)\varphi = (yr \otimes m) + \operatorname{Im}(\alpha \otimes 1) = (y \otimes rm) + \operatorname{Im}(\alpha \otimes 1) = (z, rm)\varphi)$, így átvezethető $Z \otimes M$-en: legyen az átvezető homomorfizmus γ. Erre $\beta'\gamma = 1_U$, ezért β' injektív, és ebből következik, hogy $\operatorname{Ker} \beta' = \operatorname{Ker}(\beta \otimes 1) = \operatorname{Im}(\alpha \otimes 1)$.

2. *A következő részfeladatok segítségével bizonyítsuk be, hogy Mod-R-ben minden projektív modulus lapos!*

a) Lássuk be, hogy a $- \otimes M$ funktor felcserélhető a direkt összeggel (a végtelen direkt összeggel is).

b) Bizonyítsuk be, hogy lapos modulusok tetszőleges direkt összege és direkt összeadandója is lapos.

c) Mutassuk meg, hogy az ${}_R R$ reguláris modulus lapos.

Megoldás: a) Tekintsük a következő diagramot

$$
\begin{tikzcd}
X_i \times M \arrow[rr, "\iota_i \times 1"] \arrow[d, "\alpha_i"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & & X \times M \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dd, dashed, "\exists!\varphi"] \\
X_i \otimes M \arrow[r, "\iota_i \otimes 1"] \arrow[drr, "\beta_i"'] & X \otimes M \arrow[dr, dashed, "\beta"] \arrow[r, phantom, "\#"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}
$$

ahol ι_i az X i. komponensének természetes beágyazása X-be, α_i, α és φ R-középlineáris leképezések, a többi meg $\mathbb{Z}$-modulus-homomorfizmus.
Az 1.a) miatt $\iota_i \otimes 1$ kommutatívvá teszi a felső trapézt, és $(x,m)\varphi = \sum (x_i \otimes m)\beta_i$ egyértelmű olyan, ami kommutatívvá teszi a nagy négyszöget (x_i-k az x komponensei X-ben). A tenzorszorzat univerzalitása miatt van olyan β, ami kommutatívvá teszi a jobb oldali háromszöget. Ezzel az alsó háromszög kommutatív $\Leftrightarrow$ az α_i-vel vett kompozíciója kommutatív $\Leftrightarrow$ a nagy négyszög kommutatív φ helyett $\alpha\beta$-val. Tehát az alsó háromszög kommutatív ezzel a β-val minden i-re, továbbá φ egyértelmű a nagy négyszöghöz, és φ és β meghatározzák egymást, ezért β is egyértelmű. Ebből következik, hogy $X \otimes M \cong \bigoplus_i (X_i \otimes M)$.

b) M akkor lapos, ha minden $X \overset{\alpha}{\to} Y$ injektív morfizmusra $X \otimes M \overset{\alpha \otimes 1}{\to} Y \otimes M$ is injektív. Mivel a tenzorozás (bármelyik oldalról) additív funktor, felhasadó rövid egzakt sorozatot felhasadó rövid egzaktba visz. Tegyük fel, hogy $M = M_1 \oplus M_2$, azaz $0 \to M_1 \overset{\iota_1}{\to} M \overset{\pi_2}{\to} M_2 \to 0$ felhasadó.
Tekintsük az alábbi diagramot.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & X \otimes M_1 & \to & X \otimes M & \to & X \otimes M_2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow \alpha \otimes 1_{M_1} & & \downarrow \alpha \otimes 1_M & & \downarrow \alpha \otimes 1_{M_2} & & \\
0 & \to & Y \otimes M_1 & \to & Y \otimes M & \to & Y \otimes M_2 & \to & 0
\end{array}
$$

A kígyólemma szerint $0 \to \mathrm{Ker}(\alpha \otimes 1_{M_1}) \to \mathrm{Ker}(\alpha \otimes 1_M) \to \mathrm{Ker}(\alpha \otimes 1_{M_2})$ egzakt, tehát ha a középső mag 0, akkor az első is, ha pedig az első és a harmadik 0, akkor a középső is. Vagyis lapos modulus direkt összeadandója, illetve két lapos modulus direkt összege (és így véges soké is) szintén lapos.
Legyen most $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Tegyük fel, hogy minden M_i lapos, de van olyan $0 \neq u \in X \otimes M$, hogy $u(\alpha \otimes 1_M) = 0$. Mivel az a) rész szerint $X \otimes M \cong \bigoplus_i (X \otimes M_i)$, van olyan $i_1, \ldots, i_k$ véges sok index, hogy $N = \bigoplus_{j=1}^{k} M_{i_j}$-re $u \in X \otimes N$, és $M = N \oplus N'$ felbontással

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & X \otimes N & \overset{1_X \otimes \iota}{\to} & X \otimes M & \to & X \otimes N' & \to & 0 \\
 & & \downarrow \alpha \otimes 1_N & & \downarrow \alpha \otimes 1_M & & \downarrow & & \\
0 & \to & Y \otimes N & \underset{1_Y \otimes \iota}{\to} & Y \otimes M & \to & Y \otimes N' & \to & 0
\end{array}
$$

Itt $\alpha \otimes 1_N$ injektív, mert N lapos (véges sok lapos direkt összege), és $1_Y \otimes \iota$ injektív, mert $(1_Y \otimes \iota)(1_Y \otimes \pi) = \mathrm{id}_{Y \otimes N}$, tehát a kompozíciójuk is injektív, viszont $0 \neq u \in$

$\mathrm{Im}(1_X \otimes \iota)$, és $u(\alpha \otimes 1_M) = 0$, ami ellentmond a kommutativitásnak.
Tehát akárhány lapos modulus direkt összege is lapos.

c) Tudjuk, hogy a $\varphi_X : X \underset{R}{\otimes} {}_R R \to X$, $x \otimes r \mapsto xr$ leképezés additív kiterjesztése izomorfizmus, ezért az $(\alpha \otimes 1_R)\varphi_Y = \varphi_X \alpha$ kommutativitásból következik, hogy $\alpha \otimes 1_R$ injektív.

Mivel minden projektív modulus ${}_R R$ valahány példánya direkt összegének direkt összeadandója, azt kaptuk, hogy minden projektív modulus lapos.

3. *Bizonyítsuk be, hogy az Abel-csoportok kategóriájában nem laposak azok a csoportok, amelyek nem torziómentesek: mutassuk meg, hogy ha G-nek van p rendű eleme valamely p-re, akkor a $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z}$ monomorfizmusnak a $- \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} G$ funktornál vett képe nem monomorfizmus.*

Megoldás: Legyen $\alpha : \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z}$. Tudjuk, hogy a $\mathbb{Z} \otimes G \to G$, $k \otimes g \to kg$ leképezés izomorfizmust ad, tehát ha $u \in G$, $o(u) = p$, akkor $1 \otimes u \neq 0$. Viszont $(1 \otimes u)(\alpha \otimes 1_G) = p \otimes u = 1 \otimes pu = 1 \otimes 0 = 0$, így $\alpha \otimes 1_G$ nem monomorfizmus.

4. *Számítsuk ki* $\mathrm{Ext}^n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ *értékét minden n-re a derivált funktor definíciójából, illetve a $0 \to K \to P_0 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ rövid egzakt sorozathoz rendelt hosszú egzakt sorozatból* Mod-$\mathbb{Z}$-*ben!*

Megoldás: A $\mathbb{Z}_2$ projektív felodása $\mathbb{Z}$ fölött:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1 : 1 \mapsto 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0,$$

a csonkolt projektív feloldása

$$P_\bullet : \quad 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \to 0,$$

és ennek a képe az $F = \mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z}_2)$ funktornál

$$F(P_\bullet) : \quad 0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{F(d_1)} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \to 0$$

(a bal oldali tartozik a 0. taghoz, mivel a funktor kontravariáns). A $\mathrm{Hom}(P_0, \mathbb{Z}_2) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ generátoreleme $\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha : 1 \mapsto 1} \mathbb{Z}_2$, és ennek a képe $F(d_1)$-nél $F(d_1)\alpha : 1 \mapsto 2 \mapsto 2 = 0$. Tehát $F(d_1) = 0$, és így $\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = H^0(F(P_\bullet)) = \mathbb{Z}_2/0 \cong \mathbb{Z}_2$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = H^1(F(P_\bullet)) = \mathbb{Z}_2/0 \cong \mathbb{Z}_2$, a többi $\mathrm{Ext}^n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ pedig 0.

Másképp: használjuk a $\mathbb{Z}_2$ projektív feloldásának első lépéséből a $0 \to K \to P_0 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$, azaz $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ rövid egzakt sorozatot, és írjuk fel erre a $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z}_2)$ funktor deriváltfunktorainak hosszú egzakt sorozatát. Ebben minden $n \geq 2$-re az $\mathrm{Ext}^n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ tagot két nulla tag fogja közre (mivel itt K és P_0 is projektív), így ezek az Ext-ek mind nullák, csak az elején marad négy tag:

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_1) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \to 0.$$

A Hom tagokról könnyen látható, hogy mindegyik $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf (és így $\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ is megvan), tehát

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha_0} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha_1} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\alpha_2} \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \to 0$$

egzakt. α_0 injektív, és az elemszámok miatt szürjektív is, tehát $\mathrm{Im}\, \alpha_0 = \mathrm{Ker}\, \alpha_1 = \mathbb{Z}_2 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}\, \alpha_2 = 0$, vagyis α_2 injektív és szürjektív is, így $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.

5. *a) Legyen* $0 \to K_1 \to P_0 \to M \to 0$ *egzakt, és* P_0 *projektív. Bizonyítsuk be, hogy* $0 \to \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(P_0,N) \to \mathrm{Hom}(K_1,N) \to \mathrm{Ext}^1(M,N) \to 0$ *egzakt.*

b) Legyen $0 \to K_{n-1} \to P_{n-2} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ *egzakt, és tegyük fel, hogy itt* P_i *projektív minden* i*-re. Bizonyítsuk be, hogy* $\mathrm{Ext}^n(M,N) \cong \mathrm{Ext}^1(K_{n-1},N)$.

Megoldás:

a) A $\mathrm{Hom}(-,N)$ deriváltfunktorainak hosszú egzakt sorozatában $\mathrm{Ext}^1(P_0,N)=0$, mivel P_0 projektív, így a sorozat eleje

$$0 \to \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(P_0,N) \to \mathrm{Hom}(K_1,N) \to \mathrm{Ext}^1(M,N) \to 0.$$

b) Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. M-et tekinthetjük a 0. magnak, tehát $n=1$-re nyilván igaz. Tegyük fel, hogy n-re teljesül. Ekkor a $\mathrm{Hom}(-,N)$ deriváltfunktorainak a $0 \to K_1 \to P_0 \to M \to 0$ rövid egzakt sorozatból kapott hosszú egzakt sorozatában

$$0 = \mathrm{Ext}^n(P_0,N) \to \mathrm{Ext}^n(K_1,N) \to \mathrm{Ext}^{n+1}(M,N) \to \mathrm{Ext}^{n+1}(P_0,N) = 0,$$

mivel P_0 projektív, és így $\mathrm{Ext}^{n+1}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^n(K_1,N)$. Az utóbbi pedig az indukciós feltevés szerint izomorf $\mathrm{Ext}^1(K_n,N)$-nel, mivel K_n a K_1 projektív feloldásának $(n-1)$-edik magja.

6. *Tegyük fel, hogy az* A *gráfalgebra reguláris modulusának Loewy-diagramja* $A_A = \begin{smallmatrix} &1& \\ &2& \\ 1&&3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \\ &4& \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}$.

a) Határozzuk meg $\mathrm{Ext}^3_A(1, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix})$ *dimenzióját.*

b) Számoljuk ki $\dim \mathrm{Ext}^3_A(1, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$*-et.*

c) Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$*-re létezik* $k > n$*, hogy* $\dim \mathrm{Ext}^k_A(1, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \neq 0$.

Megoldás: a) Számítsuk ki az 1 projektív feloldásában a 2. magot:

$$0 \to 4 \to \begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \\ &4& \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} &1& \\ &2& \\ 1&&3 \end{smallmatrix} \to 1 \to 0.$$

A 4.b) feladat szerint $\mathrm{Ext}^3(1, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}) \cong \mathrm{Ext}^1(4, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix})$.
A 4 projektív feloldásának első lépése:

$$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 4 \to 0.$$

A 4.a) alapján

$$0 \to \mathrm{Hom}(4, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(1, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(4, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to 0$$

egzakt, és a három Hom tag dimenziója rendre $0,1,1$, tehát a 6/3. feladat szerint $\dim \mathrm{Ext}^1(4, \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}) = 1-1+0=0$

b) Ugyanazokat a projektív feloldásokat használjuk, mint az a) részben, csak a $\mathrm{Hom}(-, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$ funktort alkalmazzuk. Itt is azt kapjuk, hogy $\mathrm{Ext}^3(1, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \cong \mathrm{Ext}^1(4, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$, és a

$$0 \to \mathrm{Hom}(4, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Hom}(1, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to \mathrm{Ext}^1(4, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \to 0$$

egzakt sorozatból $\dim \mathrm{Ext}^1(4, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) = 1-0+0=1$.

c) A

$$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} &2& \\ 1&&3 \\ &4& \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} &1& \\ &2& \\ 1&&3 \end{smallmatrix} \to 1 \to 0$$

egzakt sorozatból a 4.b) feladat alapján következik, hogy $\mathrm{Ext}^{k+3}(1, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \cong \mathrm{Ext}^k(1, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$, ha $k \geq 1$. De tudjuk, hogy $\mathrm{Ext}^3(1, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \neq 0$, így tetszőleges i-re $\mathrm{Ext}^{3i}(1, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \cong \mathrm{Ext}^3(1, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) \neq 0$.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy egy additív kovariáns funktor akkor és csak akkor visz minden rövid egzakt sorozatot jobbról egzaktba (*$0 \to X \to Y \to Z \to 0$ *egzakt* $\Rightarrow F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ *egzakt), ha minden egzakt* $X \to Y \to Z \to 0$ *sorozatra az* $F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ *sorozat egzakt.*

Hf2. *Számítsuk ki* $\mathrm{Ext}^n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ *értékét* Mod-$\mathbb{Z}_4$*-ben minden* n*-re!*