Egy kategóriában

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd} \quad \textit{pullbackje} \quad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd} \quad \textit{ha } \forall \quad \begin{tikzcd} U' \arrow[r, "\alpha''"] \arrow[d, "\beta''"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd} \quad \exists!\ \varepsilon \quad \begin{tikzcd} U' \arrow[dr, dashed, "\varepsilon"] \arrow[drr, bend left, "\alpha''"] \arrow[ddr, bend right, "\beta''"'] & & \\ & U \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ & X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \\ X \arrow[ur, phantom, "\#"] & \end{tikzcd} \quad \textit{pushoutja} \quad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\alpha'"] \\ X \arrow[r, "\beta'"'] & U \end{tikzcd} \quad \textit{ha } \forall \quad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\alpha''"] \\ X \arrow[r, "\beta''"'] & U' \end{tikzcd} \quad \exists!\ \varepsilon \quad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\alpha'"] \arrow[ddr, bend left, "\alpha''"] & \\ X \arrow[r, "\beta'"] \arrow[drr, bend right, "\beta''"'] & U \arrow[dr, dashed, "\varepsilon"] & \\ & & U' \end{tikzcd}$$

1. *Bizonyítsuk be, hogy a pullback és pushout — ha létezik — izomorfia erejéig egyértelmű, és hogy* Mod-R*-ben mindig létezik pullback:* $U = \{(x,y) \mid x\alpha = y\beta\} \le X \oplus Y$ *és pushout:* $U = X \oplus Y / \{(z\alpha, -z\beta) \mid z \in Z\}$.

Megoldás: A pullback egyértelműsége — hasonlóan a szorzat és koszorzat egyértelműségének bizonyításához — az egyértelmű átvezethetőségből következik: ha U és U' is pullback ugyanahhoz a diagramhoz, akkor létezik a megfelelő háromszögeket kommutatívvá tevő $U' \xrightarrow{\varepsilon} U$ és $U \xrightarrow{\varepsilon'} U'$ átvezetés, és akkor az U, U párhoz az $\varepsilon'\varepsilon$ és id_U is jó, az U', U' párhoz pedig $\varepsilon\varepsilon'$ és $\mathrm{id}_{U'}$ is, tehát $\varepsilon'\varepsilon = \mathrm{id}_U$ és $\varepsilon\varepsilon' = \mathrm{id}_{U'}$, amiből következik U és U' izomorfiája. Pontosan ugyanígy lehet a pushout egyértelműségét bizonyítani.

A pullbackben a megadott U-hoz legyen β', illetve α' az első, illetve második komponensre való vetítés. Így nyilván kommutatív diagramot kapunk. Ha veszünk egy másik (U', β'', α'') hármast a harmadik diagram szerint, akkor ahhoz, hogy kommutatív legyen a negyedik diagram, csak az $\varepsilon : u' \mapsto (u'\beta'', u'\alpha'')$ leképezést vehetjük, ami nyilvánvalóan homomorfizmus $X \oplus Y$-ba, és $u'\beta''\alpha = u'\alpha''\beta$ miatt az U-ba képez.

A pushoutban β' és α' az első, illetve második komponens $X \oplus Y$-ba való beágyazásának és a faktorizálásnak a kompozíciója, azaz $\beta' : x \mapsto \overline{(x,0)}$ és $\alpha' : y \mapsto \overline{(0,y)}$. A harmadik ábrán megadott U'-höz definiált ε csak akkor teszi kommutatívvá a negyedik diagramot, ha $\overline{(x,0)} \mapsto x\beta''$ és $\overline{(0,y)} \mapsto y\alpha''$, azaz $\varepsilon : \overline{(x,y)} \mapsto x\beta'' + y\alpha''$. Az $(x,y) \mapsto x\beta'' + y\alpha''$ leképezés nyilván homomorfizmus $X \oplus Y$-ból U'-be, és a magjában benne van az U definíciójában használt faktorizáló részmodulus: $z\alpha\beta'' - z\beta\alpha'' = 0$, így definiál egy homomorfizmust U-ból U'-be.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha modulusok pullbackjében vagy pushoutjában α vagy β monomorfizmus, illetve epimorfizmus, akkor a vele "párhuzamos" nyíl is ilyen!*

Megoldás: A monomorfizmus esetét bizonyítjuk (és a szimmetria miatt nyilván elég az α-ra), az epimorfizmus esete házi feladat.

Tegyük fel, hogy a pullbackben α monomorfizmus. Szeretnénk belátni, hogy α' is az. Ha $0 = (x,y)\alpha' = y$, akkor $x\alpha = y\beta = 0$, s mivel α monomorfizmus, ebből $x = 0$ is következik, azaz $(x,y) = (0,0)$.

Tegyük fel, hogy a pushoutban α monomorfizmus. Ha $0 = y\alpha' = \overline{(0,y)}$, akkor van olyan $z \in Z$, amelyre $(0,y) = (z\alpha, -z\beta)$. Ebből $0 = z\alpha$, és α injektivitása miatt $z = 0$, tehát $y = -z\beta = 0\beta = 0$.

3. *Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{A}b$-ban az* $\operatorname{Ext}^1(-,N)$ *funktor kontravariáns jobbegzakt. Milyen N-re lesz egzakt?*

Megoldás: A projektív Abel-csoportok a szabad Abel-csoportok, és szabad Abel-csoportnak része is szabad, ezért minden Abel-csoportnak van olyan projektív feloldása, amely már P_1-nél véget ér. Ebből következik, hogy $\operatorname{Ext}^n(M,N)=0$, ha $n\geq 2$. Vagyis a $0\to X\to Y\to Z\to 0$ rövid egzakt sorozatból a $\operatorname{Hom}(-,N)$ alkalmazásával kapott hosszú egzakt sorozat

$$\begin{aligned}0 &\to \operatorname{Hom}(Z,N)\to \operatorname{Hom}(Y,N)\to \operatorname{Hom}(X,N)\\ &\to \operatorname{Ext}^1(Z,N)\to \operatorname{Ext}^1(Y,N)\to \operatorname{Ext}^1(X,N)\to 0.\end{aligned}$$

Ebből látható a jobbegzaktság. Egzakt akkor lesz, ha $\operatorname{Ext}^1(Z,N)\to\operatorname{Ext}^1(Y,N)$ injektív, azaz a magja 0, ami ekvivalens azzal, hogy a $\operatorname{Hom}(X,N)\to\operatorname{Ext}^1(Z,N)$ a 0-leképezés, azaz hogy $0\to\operatorname{Hom}(Z,N)\to\operatorname{Hom}(Y,N)\to\operatorname{Hom}(X,N)\to 0$ is egzakt. Ez pedig pontosan akkor igaz minden rövid egzaktra, ha N injektív, tehát az $\operatorname{Ext}^1(-,N)$ funktor is csak ekkor lesz egzakt (igaz, hogy akkor triviális is).

4. *Határozzuk meg az* $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_4)$ *csoportot! Adjuk meg az elemeinek megfelelő bővítéseket* $\operatorname{Ex}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_4)$*-ben!*

Megoldás: Használjuk a 8/5.a) feladat módszerét $\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_4)$ kiszámítására!
A $0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_4\to 0$ rövid egzakt sorozatból (a projektív feloldás első lépéséből) a

$$0\to\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_4)\to\operatorname{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_4)\to\operatorname{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_4)\to\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_4)\to 0$$

azaz

$$0\to\mathbb{Z}_4\xrightarrow{\alpha}\mathbb{Z}_4\xrightarrow{\beta}\mathbb{Z}_4\xrightarrow{\gamma}\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_4)\to 0$$

egzakt sorozatot kapjuk. Itt α injektív, és így az elemszámok miatt izomorfizmus is, de akkor $\operatorname{Ker}\beta=\mathbb{Z}_4$, tehát $\beta=0$. Ebből pedig $\operatorname{Ker}\gamma=\operatorname{Im}\beta=0$ következik, azaz γ injektív és szürjektív is, vagyis $\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_4)\cong\mathbb{Z}_4$.
Egy nyilvánvaló nemfelhasadó bővítés

$$\xi:\quad 0\to\mathbb{Z}_4\xrightarrow{1\mapsto 4}\mathbb{Z}_{16}\xrightarrow{1\mapsto 1}\mathbb{Z}_4\to 0.$$

Ha a második morfizmus helyett a (-1)-gyel való szorzást vesszük, a kapott bővítés könnyen láthatóan nem ekvivalens ξ-vel:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\xi: & 0 & \to & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{1\mapsto 4} & \mathbb{Z}_{16} & \xrightarrow{1\mapsto 1} & \mathbb{Z}_4 & \to & 0\\
 & & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \kappa & & \downarrow \mathrm{id} & & \\
\xi': & 0 & \to & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{1\mapsto 4} & \mathbb{Z}_{16} & \xrightarrow{1\mapsto -1} & \mathbb{Z}_4 & \to & 0
\end{array}$$

nem lehet kommutatív, mert az első négyzet kommutativitásából $\kappa:1\mapsto 4k+1$ következik (valamely $k\in\mathbb{Z}$-re), és azzal nem kommutatív a második. (Mellesleg $\xi'\equiv(-\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_4})\xi\equiv\xi(-\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_4})=-\xi$.) Tehát már csak egy nemtriviális bővítés hiányzik, és az csak $2\xi=(2\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_4})\xi$ lehet, mivel $\operatorname{Ex}(\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_4)\cong\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_4)\cong\mathbb{Z}_4$.
Számítsuk ki 2ξ-t!

$$\begin{array}{ccccccccccc}
2\xi: & 0 & \to & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{\varepsilon} & U & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{Z}_4 & \to & 0\\
 & & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \kappa & & \downarrow 2\mathrm{id} & & \\
\xi: & 0 & \to & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{1\mapsto 4} & \mathbb{Z}_{16} & \xrightarrow{1\mapsto 1} & \mathbb{Z}_4 & \to & 0
\end{array}$$

U a $\mathbb{Z}_{16} \xrightarrow{1\mapsto 1} \mathbb{Z}_4 \xleftarrow{2\mathrm{id}} \mathbb{Z}_4$ diagram pullbackje, azaz

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_4 \mid x \equiv 2y \pmod 4\} = \langle (2,1),(8,2) \rangle \cong \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Valóban, ha $\mathbb{Z}_4$-et az $\langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$ csoportba képezzük úgy, hogy $1 \mapsto 2a+b$, akkor ez beágyazás lesz, és a faktorcsoportot a generálja, tehát $\mathbb{Z}_4$-nek $\mathbb{Z}_4$-gyel való bővítését kapjuk.

5. *Legyen A véges dimenziós K-algebra, és $M, N \in \operatorname{mod}\text{-}A$. Bizonyítsuk be, hogy ha a ξ és η bővítések lineárisan összefüggők, de egyik sem nulla $\operatorname{Ex}(M,N)$-ben (azaz nem felhasadók), akkor a középső tagjuk izomorf!*

Megoldás: A feltétel miatt $\eta = c \cdot \xi$ valamely $0 \neq c \in K$ elemre, azaz $\eta = (c \cdot \mathrm{id})\xi$ az $\operatorname{Ex}(M,N)$-ben. A

$$\begin{array}{rccccccccc} c\xi: & 0 & \to & N & \to & L & \to & M & \to & 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa} & & \downarrow{\scriptstyle c\cdot\mathrm{id}} & & \\ \xi: & 0 & \to & N & \to & \tilde{L} & \to & M & \to & 0 \end{array}$$

diagramban id és $c \cdot \mathrm{id}$ is izomorfizmus, így a kígyó-lemma miatt κ is az.

6. *Tekintsük azt az A gráfalgebrát, amelynek jobbreguláris modulusa $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$.*
Határozzuk meg az $\operatorname{Ext}^1_A(\,1\,, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix})$ vektortér dimenzióját, és adjunk meg a vele izomorf $\operatorname{Ex}_A(\,1\,, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix})$ térben egy bázist. Ciklikus lesz-e ez mint $\operatorname{End}(\,1\,)$-, illetve mint $\operatorname{End}(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix})$-modulus?

Megoldás: $\operatorname{Ext}^1(\,1\,, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix})$ kiszámításához tekintsük az 1 modulus projektív feloldásának első lépését:

$$0 \to \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \to 1 \to 0$$

és a $\operatorname{Hom}(-, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix})$ funktor által hozzárendelt hosszú egzakt sorozat elejét (mint a 8/5.a) feladatban):

$$0 \to \operatorname{Hom}(\,1\,, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}) \to \operatorname{Hom}(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}) \to \operatorname{Hom}(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}) \to \operatorname{Ext}^1(\,1\,, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}) \to 0.$$

Itt a Hom-ok dimenziói rendre $0, 0, 2$, és így $\dim \operatorname{Ext}^1(\,1\,, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}) = 2 - 0 + 0 = 2$. Tehát elég két független nem felhasadó bővítést találni, ilyenek az $\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}$ projektív modulus és az $\begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$ modulusok. Mivel ezek nem izomorfak (és a bővítésk nem felhasadók), az 5. feladat szerint nem lehetnek lineárisan összefüggők $\operatorname{Ex}(\,1\,, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix})$-ben.

Mivel $\operatorname{End}(\,1\,)$ csak az id skalárszorosaiból áll, $\operatorname{End}(\,1\,) \cong K$ test, vagyis $\operatorname{Ex}(\,1\,, \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix})$ efölött vektortér, és egy kétdimenziós vektortér nem lehet ciklikus.

$\operatorname{End}(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix})$-nek viszont van olyan eleme, amely nem izomorfizmus; ilyen például az az $\alpha : \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$ homomorfizmus, amely a felső báziselemet az alsóba viszi (az alsót pedig 0-ba). Nézzük meg, mi lesz a projektív középső tagú ξ bővítésnek az α-val való lenyomottja!

$$\begin{array}{rccccccccc} \xi: & 0 & \to & \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix} & \to & \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} & \to & 1 & \to & 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ \xi\alpha: & 0 & \to & \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix} & \to & \tilde{L} & \to & 1 & \to & 0 \end{array}$$

(ξ-ben azokat a morfizmusokat vesszük, amelyek a Loewy-diagramhoz tartozó báziselemeket báziselemekbe vagy 0-ba viszik.)

Itt $\tilde{L}$-ot a pushoutban úgy kapjuk meg, hogy a $\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}$ direkt összegben az első komponens második báziselemének és a második komponens felső 2-es típusú báziselemének a különbsége által generált részmodulussal faktorizálunk ki, így a kapott modulus Loewy-diagramja $\begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$. Tehát ξ kigenerálja a teljes jobb $\mathrm{End}(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix})$-modulust.

Hf1. *Bizonyítsuk be a 2. feladat állítását arra az esetre, amikor egy pullbackban, illetve pushoutban α epimorfizmus! (Használjuk az 1. feladatban megadott konstrukciókat!)*

Hf2. *Legyen*

$$\xi: \quad 0 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_4 \to 0$$

az a bővítés $\mathrm{Ex}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$*-ben, amelynél a monomorfizmus az* 1 *elemet* $(1,2)$*-be képezi, az epimorfizmus pedig* $(0,1)$*-et* 1*-be,* $(1,0)$*-t pedig* 2*-be. Határozzuk meg az* $f\xi$ *és* ξg *bővítésekben a középső tagot, ha* $f: \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ *és* $g: \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$ *nemnulla homomorfizmusok!*