1. *Legyen $f, f_1, f_2 : X \to Y$, és $\xi :\ 0 \to N \to L \to M \to 0$ egy bővítés. Bizonyítsuk be, hogy*

a) $f\Delta_Y = \Delta_X(f \oplus f)$, *b)* $\nabla_X f = (f \oplus f)\nabla_Y$,

c) $f_1 + f_2 = \Delta_X(f_1 \oplus f_2)\nabla_Y$,

d) $\nabla_M \xi = (\xi \oplus \xi)\nabla_N$, *e)* $\xi\Delta_N = \Delta_M(\xi \oplus \xi)$.

Megoldás:

a) $f\Delta_Y : x \mapsto xf \mapsto (xf, xf)$,
$\Delta_X(f \oplus f) : x \mapsto (x, x) \mapsto (xf, xf)$.

b) $\nabla_X f : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 \mapsto (x_1 + x_2)f = x_1 f + x_2 f$,
$(f \oplus f)\nabla_Y : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 f, x_2 f) \mapsto x_1 f + x_2 f$.

c) $\Delta_X(f_1 \oplus f_2)\nabla Y : x \mapsto (x, x) \mapsto (xf_1, xf_2) \mapsto xf_1 + xf_2 = x(f_1 + f_2)$

d) és e)

$$\begin{array}{lccccccccc}
\xi \oplus \xi : & 0 & \to & N \oplus N & \longrightarrow & L \oplus L & \longrightarrow & M \oplus M & \to & 0 \\
 & & & \downarrow \nabla_N & & \downarrow \nabla_L & & \downarrow \nabla_M & & \\
\xi : & 0 & \to & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \to & 0 \\
 & & & \downarrow \Delta_N & & \downarrow \Delta_L & & \downarrow \Delta_M & & \\
\xi \oplus \xi : & 0 & \to & N \oplus N & \longrightarrow & L \oplus L & \longrightarrow & M \oplus M & \to & 0
\end{array}$$

A diagramból látszik, hogy az első két sor között van egy bővítés, amely egyszerre $(\xi \oplus \xi)\nabla_N$-nel és $\nabla_M \xi$-vel is ekvivalens. És ugyanúgy az alsó két sorból kapunk egy bővítést, amely $\xi\Delta_N$-nel és $\Delta_M(\xi \oplus \xi)$-vel is ekvivalenst.

2. *Az 1. feladat összefüggéseit felhasználva bizonyítsuk be, hogy $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(M', M)$-re, $g, g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}(N, N')$-re és $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathrm{Ex}(M, N)$-re*

$(f_1 + f_2)\xi = f_1\xi + f_2\xi$,
$\xi(g_1 + g_2) = \xi g_1 + \xi g_2$,
$f(\xi_1 + \xi_2) = f\xi_1 + f\xi_2$,
$(\xi_1 + \xi_2)g = \xi_1 g + \xi_2 g$.

Megoldás:

$$f_1\xi + f_2\xi = \Delta_{M'}(f_1\xi \oplus f_2\xi)\nabla_N = \Delta_{M'}(f_1 \oplus f_2)(\xi \oplus \xi)\nabla_N \overset{d)}{=} \Delta_{M'}(f_1 \oplus f_2)\nabla_M \xi \overset{c)}{=} (f_1 + f_2)\xi$$

$$\xi g_1 + \xi g_2 = \Delta_M(\xi g_1 \oplus \xi g_2)\nabla_{N'} = \Delta_M(\xi \oplus \xi)(g_1 \oplus g_2)\nabla_{N'} \overset{e)}{=} \xi\Delta_N(g_1 \oplus g_2)\nabla_{N'} \overset{c)}{=} \xi(g_1 + g_2)$$

$$f(\xi_1 + \xi_2) = f\Delta_M(\xi_1 \oplus \xi_2)\nabla_N \overset{a)}{=} \Delta_{M'}(f \oplus f)(\xi_1 \oplus \xi_2)\nabla_N = \Delta_{M'}(f\xi_1 \oplus f\xi_2)\nabla_N = f\xi_1 + f\xi_2$$

$$(\xi_1 + \xi_2)g = \Delta_M(\xi_1 \oplus \xi_2)\nabla_N g \overset{b)}{=} \Delta_M(\xi_1 \oplus \xi_2)(g \oplus g)\nabla_{N'} = \Delta_M(\xi_1 g \oplus \xi_2 g)\nabla'_N = \xi_1 g + \xi_2 g$$

3. *Lássuk be, hogy bármely $\xi \in \mathrm{Ex}(M, N)$-re $0\xi = \xi 0 = 0$, ahol az utolsó 0 a felhasadó bővítések ekvivalenciaosztálya $\mathrm{Ex}(M, N)$-ben.*

Megoldás: Először lássuk be, hogy a felhasadó bővítések valóban egy ekvivalenciaosztályt alkotnak. Ha ξ_1 és ξ_2 az M-nek N-nel való két felhasadó bővítése, ahol α_i, β_i a morfizmusok, és α'_i, β'_i a visszafelé menők $(i = 1, 2)$, akkor $\kappa = \alpha'_1\alpha_2 + \beta_1\beta'_2$-vel $(\mathrm{id}_N, \kappa, \mathrm{id}_M)$ láncleképezés ξ_1-ből ξ_2-be. Fordítva, ha ξ_2 felhasadó, és van egy $(\mathrm{id}_N, \kappa, \mathrm{id}_N)$ láncleképezés ξ_1-ből ξ_2-be, akkor $\alpha'_1 := \kappa\alpha'_2$ mutatja, hogy ξ_1 is felhasadó.
Legyen most $\xi \in \mathrm{Ex}(M, N)$ tetszőleges.

$$\begin{array}{lccccccccc}
0\xi : & 0 & \to & N & \xrightarrow{\varepsilon} & \tilde{L} & \xrightarrow{\beta'} & M & \to & 0 \\
 & & & \downarrow \mathrm{id}_N & & \downarrow \kappa & & \downarrow 0 & & \\
\xi : & 0 & \to & N & \xrightarrow{\alpha} & L & \xrightarrow{\beta} & M & \to & 0 \\
 & & & \downarrow 0 & & \downarrow \kappa' & & \downarrow \mathrm{id}_M & & \\
\xi 0 : & 0 & \to & N & \xrightarrow{\alpha'} & \hat{L} & \xrightarrow{\varepsilon'} & M & \to & 0
\end{array}$$

Ekkor a jobb fölső pullbacknél az $L \xleftarrow{0} M \xrightarrow{\mathrm{id}_M} M$ kiegészítés átvezethető $\tilde{L}$-on a pullback univerzalitása miatt: $\exists M \xrightarrow{\delta} \tilde{L}$: $\delta\beta' = \mathrm{id}_M$ (és $\delta\kappa = 0$), és ez mutatja a 0ξ felhasadását. A bal alsó pushoutnál pedig az $N \xrightarrow{\mathrm{id}_N} N \xleftarrow{0} L$ vezethető át $\hat{L}$-on, így $\xi 0$ is felhasadó.

4. *Legyen* $\eta: \ 0 \to K \to P \to M \to 0$ *egzakt, ahol* P *projektív. Bizonyítsuk be, hogy a* $\mathrm{Hom}(K,N) \xrightarrow{\eta\cdot} \mathrm{Ex}(M,N)$ *szürjektív leképezés összegtartó, és ebből azt, hogy* $\mathrm{Ex}(M,N)$ *Abel-csoport.*

Megoldás: Láttuk előadáson, hogy a $\eta\cdot$ leképezés szürjektív, és a 2. feladat második egyenlősége miatt összegtartó is. Ebből következik, hogy $\mathrm{Ex}(M,N)$ is kielégíti az Abel-csoportok axiómáit, mert ezeket is elég az ηg alakú elemekre megnézni:
$(\eta g_1+\eta g_2)+\eta g_3 = \eta(g_1+g_2)+\eta g_3 = \eta((g_1+g_2)+g_3) = \eta(g_1+(g_2+g_3)) = \eta g_1+\eta(g_2+g_3) = \eta g_1 + (\eta g_2 + \eta g_3)$,
$\eta g_1 + \eta g_2 = \eta(g_1+g_2) = \eta(g_2+g_1) = \eta g_2 + \eta g_1$,
$0 + \eta g = \eta 0 + \eta g = \eta(0+g) = \eta g$ a 3. feladat miatt, és
$\eta g + \eta(-g) = \eta(g+(-g)) = \eta 0 = 0$.

5. *Legyen* $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ *egzakt sorozat. Az* $\mathrm{Ext}(-,N)$*-ek hosszú egzakt sorozatából*
a) bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathrm{pd}\,X$, $\mathrm{pd}\,Y$ *és* $\mathrm{pd}\,Z$ *projektív dimenziók közül kettő véges, akkor a harmadik is;*
b) $\mathrm{pd}\,Y \le \max(\mathrm{pd}\,X, \mathrm{pd}\,Z)$*;*
c) ha $\mathrm{pd}\,X < \mathrm{pd}\,Y$*, akkor* $\mathrm{pd}\,Z = \mathrm{pd}\,Y$.

Megoldás: Használjuk a hosszú egzakt sorozatban a rövidített $(M,N)^0 := \mathrm{Hom}(M,N)$ és $(M,N)^k = \mathrm{Ext}^k(M,N)$ jelölést.

a) Legyen n nagyobb a két véges projektív dimenziónál. Ekkor

$$\cdots \to (Z,N)^n \to (Y,N)^n \to (X,N)^n \to (Z,N)^{n+1} \to (Y,N)^{n+1} \to \cdots$$

Bármelyik kettőről tettük fel, hogy a projektív dimenziója n-nél kisebb, a hosszú egzakt sorozatban a harmadikat tartalmazó $(Y,N)^n$, $(X,N)^n$ vagy $(Z,N)^{n+1}$ két 0 közé esik, így az egzaktság miatt maga is 0 minden N-re.

b) Ha $\max(\mathrm{pd}\,X, \mathrm{pd}\,Z) = \infty$, akkor nincs mit bizonyítani. Ha $\max(\mathrm{pd}\,X, \mathrm{pd}\,Z) = n < \infty$, akkor a hosszú egzakt sorozatban

$$0 = (Z,N)^{n+1} \to (Y,N)^{n+1} \to (X,N)^{n+1} = 0$$

minden N-re, ezért a középső is 0, így $\mathrm{pd}\,Y \le n$.

c) Ha $\mathrm{pd}\,Y = \infty$, akkor $\mathrm{pd}\,Z = \infty$, mert különben az a) rész szerint $\mathrm{pd}\,X < \infty$ miatt $\mathrm{pd}\,Y$-nak végesnek kellene lennie.
Tegyük fel, hogy $\mathrm{pd}\,Y = n < \infty$, és így $\mathrm{pd}\,X \le n-1$.

$$\begin{array}{ccccccccc} (Z,N)^n & \to & (Y,N)^n & \to & (X,N)^n & \to & (Z,N)^{n+1} & \to & (Y,N)^{n+1} \\ & & \neq 0 \ \exists N & & = 0 \ \forall N & & & & = 0 \ \forall N \end{array}$$

Az egzaktság miatt $(Z,N)^{n+1} = 0 \ \forall N$, és $(Z,N)^n \neq 0$ valamely N-re (mert különben a közbeeső $(Y,N)^n = 0$ lenne minden N-re), így $\mathrm{pd}\,Z = n$.

6. *Bizonyítsuk be, hogy* $M \in \text{mod-}A$ *akkor és csak akkor*
a) projektív, ha $\mathrm{Ext}^1(M,S) = 0$ *minden* S *egyszerű modulusra;*
b) injektív, ha $\mathrm{Ext}^1(S,M) = 0$ *minden* S *egyszerű modulusra.*

Megoldás: Vegyük észre, hogy $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ egzakt sorozatra a $\operatorname{Hom}(M, -)$-vel, illetve $\operatorname{Hom}(-, M)$-mel nyert hosszú egzakt sorozatból következik, hogy

$$\operatorname{Ext}^k(M, X) = \operatorname{Ext}^k(M, Z) = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{Ext}^k(M, Y) = 0 \text{ és}$$

$$\operatorname{Ext}^k(X, M) = \operatorname{Ext}^k(Z, M) = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{Ext}^k(Y, M) = 0.$$

Tehát az a) és b) részben is írhatunk egyszerű S helyett véges dimenziós modulust.
Az odafelé irány mindkét részben nyilvánvaló.

a) Tegyük fel, hogy $\operatorname{Ext}^1(M, U) = 0$ minden véges dimenziós U modulusra. M végesen generált $\Rightarrow$ homomorf képe egy végesen generált $P = \bigoplus_{i=1}^{m} A_A$ véges dimenziós projektívnek:

$$\xi : \; 0 \to K \to P \to M \to 0$$

egzakt, és K véges dimenziós, így $\operatorname{Ext}^1(M, K) = 0$, ezért ξ felhasadó bővítés $\Rightarrow$ M izomorf P egy direkt összeadandójával, tehát M projektív.

b) Tegyük fel, hogy $\operatorname{Ext}^1(U, M) = 0$ minden véges dimenziós U modulusra. A Baer-kritérium miatt elég az $I \to A_A$ beágyazásokra ellenőrizni az injektivitást. De akkor a $0 \to I \to A_A \to A_A/I \to 0$ egzakt sorozatból $\operatorname{Hom}(-, M)$-mel kapott hosszú egzakt sorozatban

$$\cdots \to \operatorname{Hom}(A_A, M) \to \operatorname{Hom}(I, M) \to \operatorname{Ext}^1(A_A/I, M) = 0,$$

ugyanis A_A/I véges dimenziós, így $\operatorname{Hom}(A_A, M) \to \operatorname{Hom}(I, M)$ szürjektív, tehát M injektív.

7. *Számítsuk ki az alábbi Loewy-diagramokhoz tartozó gráfalgebrák globális dimenzióját.*

a) $A_A = \substack{1\\2\\2} \oplus \substack{2\\2}$

b) $A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ & 4 & \end{smallmatrix} \oplus \substack{2\\4} \oplus \substack{3\\4\\3} \oplus \substack{4\\3}$

Megoldás: a) $0 \to \substack{2\\2} \to \substack{1\\2\\2} \to 1 \to 0$ az 1 egyszerű modulus projektív feloldása, tehát $\operatorname{pd} 1 = 1$. (1 nem projektív, de az első szizigije már igen.)
$\cdots \to \substack{2\\2} \to \substack{2\\2} \to \substack{2\\2} \to 2 \to 0$ végtelen projektív feloldás (mindegyik szizigi 2, ami nem projektív), tehát $\operatorname{pd} 2 = \infty$, és így $\operatorname{gldim} A = \infty$.

b) A négy egyszerű modulus (minimális) projektív feloldása:

$0 \to \substack{4\\3} \to \substack{2\\4} \oplus \substack{3\\4\\3} \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ & 4 & \end{smallmatrix} \to 1 \to 0,$

$0 \to \substack{4\\3} \to \substack{3\\4\\3} \to \substack{4\\3} \to \substack{2\\4} \to 2 \to 0,$

$0 \to \substack{4\\3} \to \substack{3\\4\\3} \to 3 \to 0$ és

$0 \to \substack{4\\3} \to \substack{3\\4\\3} \to \substack{4\\3} \to 4 \to 0.$

Tehát $\operatorname{pd} 1 = 2$, $\operatorname{pd} 2 = 3$, $\operatorname{pd} 3 = 1$ és $\operatorname{pd} 4 = 2$, így $\operatorname{gldim} A = 3$.

8. *Bizonyítsuk be, hogy a következő kovariáns funktorpárok adjungáltak.*

a) $F : \mathcal{S}et \to \mathcal{G}rp$ *a szabadon generálás* ($F(X)$ *az* X *halmaz által szabadon generált csoport) és* $G : \mathcal{G}rp \to \mathcal{S}et$ *a felejtő funktor (ami minden csoporthoz az alaphalmazát rendeli).*

b) $F : \mathcal{G}rp \to K\text{-}\mathcal{A}lg$, $F(G) = KG$ *csoportalgebra és*
$G : K\text{-}\mathcal{A}lg \to \mathcal{G}rp$, $G(A) = \{\, u \in A \mid \exists u^{-1} \,\}$ *az egységek csoportja.*

Megoldás: a) Az $X \to F(X)$ leképezés kovariáns funktor $\mathcal{S}et$-ből $\mathcal{G}rp$-be, mert minden $\varphi : X \to Y$ természetesen ad egy $X \to F(Y)$ halmazleképezést, és ez kiterjeszthető $F(X) \to F(Y)$ csoporthomomorfizmussá. Nyilvánvaló, hogy a megszorítás is kovariáns funktor. Azt kell még belátni, hogy $H_1 := \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(X, H)$ és $H_2 := \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}rp}(F(X), H)$ között van egy természetes bijekció, ha X halmaz, és H csoport. Valóban, $\varphi \in H_1$-hez a szabad csoport univerzalitása miatt $\exists!\ \overline{\varphi} \in H_2$, hogy $\overline{\varphi}|_X = \varphi$. Tehát ha H_1-ből H_2-be vesszük az $\alpha : \varphi \mapsto \overline{\varphi}$ leképezést, visszafelé pedig a $\beta : \psi \mapsto \psi|X$ megszorítást, akkor $\alpha\beta = \mathrm{id}_{H_1}$ az előbbiek szerint, és $\beta\alpha = \mathrm{id}_{H_2}$ is igaz a $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$ megfeleltetésben $\overline{\varphi}$ egyértelműsége miatt. Könnyen látható az is, hogy ez a megfeleltetés természetes mindkét komponensében.

Ha $X \xrightarrow{\gamma} Y$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(X,H) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}rp}(F(X),H) \\ \uparrow \gamma\cdot & \# & \uparrow \overline{\gamma}\cdot \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(Y,H) & \xrightarrow[\alpha]{} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}rp}(F(Y),H), \end{array}$$

mivel $\overline{\gamma\varphi} = \overline{\gamma} \cdot \overline{\varphi}$.

Ha $H \xrightarrow{\delta} G$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(X,H) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}rp}(F(X),H) \\ \downarrow \cdot\delta & \# & \downarrow \cdot\delta \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(X,G) & \xrightarrow[\alpha]{} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}rp}(F(X),G), \end{array}$$

mert $\overline{\varphi\delta} = \overline{\varphi} \cdot \delta$.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy az* $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$ *Loewy-diagrammal megadott algebra fölött az* $\begin{smallmatrix} 1 & \\ 2 & 1 \\ 2 & \end{smallmatrix}$ *és az egyszerű* $\begin{smallmatrix} 1 \end{smallmatrix}$ *modulus injektív. (Használjuk a 6.b) feladatot.)*

Hf2. *Legyen* $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ *egzakt sorozat. Az* $\mathrm{Ext}(-, N)$*-ek hosszú egzakt sorozatából bizonyítsuk be, hogy*

a) ha $\mathrm{pd}\, X > \mathrm{pd}\, Y$*, akkor* $\mathrm{pd}\, Z = \mathrm{pd}\, X + 1$*;*

b) ha $\mathrm{pd}\, X = \mathrm{pd}\, Y$*, akkor* $\mathrm{pd}\, Z \le \mathrm{pd}\, X + 1$*.*

Adjunk példát arra, hogy a b) esetben $\mathrm{pd}\, Z < \mathrm{pd}\, X + 1$ *és* $\mathrm{pd}\, Z = \mathrm{pd}\, X + 1$ *is lehetséges.*