1. Egy n elemű halmaznak
a) hány k elemű részhalmaza van;
b) összesen hány részhalmaza van;
c) hány páros elemszámú részhalmaza van?

2. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$; b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ (ha $n \geq 1$).

3. Lássuk be az $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ és az $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ azonosságokat kombinatorikus módszerrel, és az $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ formula felhasználásával is.

4. Bizonyítsuk be a polinomiális tételt:

$$(a_1 + \ldots + a_k)^n = \sum_{i_1+\ldots+i_k=n} \frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_k!} a_1^{i_1}\cdots a_k^{i_k}.$$

5. Bizonyítsuk be teljes indukcióval a következő összegképleteket:
a) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;
b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
c) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;
d) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = n(4n^2-1)/3$

6. Bizonyítsuk be, hogy egy S félcsoportra ekvivalens a következő két állítás.
(i) Minden $a, b \in S$-re megoldható az $ax = b$ és az $ya = b$ egyenlet.
(ii) S-ben van egységelem (azaz $e \in S$, amellyel $ea = ae = a$ minden $a \in S$-re), és minden $a \in S$ elemnek van inverze (azaz olyan $a' \in S$, amelyre $aa' = a'a = e$).

7. Bizonyítsuk be, hogy egy egységelemes félcsoportban
a) ha a és b invertálható, akkor ab és ba is invertálható;
b) ha ab és ba invertálható, akkor a és b is invertálható.

8. Gyűrűt, illetve testet alkot-e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a komponensenkénti műveletekre nézve (azaz: $(a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot c, b\cdot d)$ és $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$)? Van-e egységelem, nullelem?

9. Lássuk be, hogy tetszőleges gyűrűben $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ minden a elemre, továbbá $(a(-b) = (-a)b = -(ab)$ minden a, b-re.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy egy félcsoportban az $a_1\cdots a_n$ szorzat bármely zárójelezése ugyanazt az elemet adja.

Hf3. Bizonyítsuk be, hogy az $\{\, f(x) = ax + b \,|\, a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \,\}$ függvények csoportot alkotnak a kompozícióval mint szorzással.