1. a) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}$-nak nincs olyan valódi részhalmaza, amely az eredeti műveletekkel testet alkot.
b) Bizonyítsuk be, hogy a legkisebb olyan résztest $\mathbb{R}$-ben, amely tartalmazza a $\sqrt{2}$ számot, az $\{\, a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\,\}$.

2. Egy egység élű kocka alaplapja az $ABCD$ négyzet, fedőlapja $A'B'C'D'$, ahol az egyes csúcsok az alapon azonos betűvel jelzett csúcsok fölött vannak. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{DC}|$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'C}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC'}$ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC'}$.

3. Tegyük föl, hogy a C pont $m : n$ arányban osztja két részre az AB szakaszt. Jelöljön O egy tetszőleges pontot. Fejezzük ki az $\overrightarrow{OC}$ vektort az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok, valamint m és n segítségével.

4. Mely $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra teljesülnek az alábbi összefüggések?
a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$;
b) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$;
c) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$;

5. Legyen O az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ csúcspontok által meghatározott szabályos n-szög középpontja. Határozzuk meg az $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}$ vektorösszeget.

6. Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egymással nem párhuzamos vektorok. Milyen α, β, γ és δ együtthatók esetén lesz $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ párhuzamos a $\gamma\mathbf{a} + \delta\mathbf{b}$ vektorral?

7. Igazoljuk, hogy tetszőleges síknégyszög oldalfelezőpontjai parallelogrammát alkotnak.

8. Határozzuk meg az ABCD tetraéder térfogatát, ha a csúcsok koordinátái: $A(1, 0, 0)$, $B(2, 3, -1)$, $C(1, 1, 1)$ és $D(0, 4, 1)$.

9. a) Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$ és $\mathbf{b} = (-2, -1, 1)$ vektorok szögét.
b) Adjuk meg az $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$ vektor merőleges vetületét a $\mathbf{b} = (2, -1, 2)$ vektorra.

10. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét, ha tudjuk, hogy $5\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{a} - \mathbf{b}$-re, továbbá $4\mathbf{a} + \mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{b}$-re.

11. Ha $\mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{b}$-re, akkor mivel egyenlő az $\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})))$?

Hf1. Egy háromszög harmadolóvonalának hívjuk azt a szakaszt, amelyik egy csúcsot a szemközti oldal valamelyik harmadolópontjával köt össze. Bizonyítsuk be, hogy a súlyvonal negyedeli a háromszög (egyik) harmadolóvonalát! Milyen arányban osztja ez a harmadolóvonal a súlyvonalat?

Hf2. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hossza 1 és 2, a $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektoré pedig 2. Határozzuk meg $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szögét!

Hf3. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ térvektorokra $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor igaz, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak egymással vagy merőlegesek egymásra.