1. Osszuk el maradékosan az $x^5 - 3x^4 + 2x + 1$ polinomot
a) $(x^2 + 2x - 3)$-mal;
b) $(x - 2)$-vel;
c) $(x^2 - 4)$-gyel.

2. Milyen maradékot ad a $100x^{100} + 99x^{99} + 98x^{98} + \ldots + 2x^2 + x$ polinom az $x^2 - 1$, illetve az $x^2 + 1$ polinommal osztva?

3. Igaz-e, hogy ha
a) $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$, és $g(x) \mid f(x)$ igaz $\mathbb{R}[x]$-ben, akkor $\mathbb{Q}[x]$-ben is igaz?
b) $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{Q}[x]$, és $g(x) \mid f(x)$ igaz $\mathbb{Q}[x]$-ben, akkor $\mathbb{Z}[x]$-ben is igaz?

4. Tegyük fel, hogy $f(x)g(x) = h(x)$, ahol $f(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ és $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, továbbá, hogy $f(x)$ főegyütthatója 1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

5. Számítsuk ki az $x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1$ és $x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2$ polinomok legnagyobb közös osztóját.

6. Keressük meg a $2x^6 + x^5 - 5x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3x + 3$ polinom összes gyökét. Bontsuk föl a polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben, illetve $\mathbb{Q}[x]$-ben.

7. Keressük meg a következő polinomok összes gyökét $\mathbb{C}$-ben, és írjuk fel a polinomokat $\mathbb{C}$ fölött lineáris tényezők szorzataként!
a) $x^6 - x^4 + 2$;
b) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

8. Adjuk meg a következő polinomok gyöktényezős alakját:
a) $x^3 - 1$; b) $x^2 + x + 1$; c) $x^4 + 1$; d) $x^n - 1$; e) $x^n + 1$;

9. Van-e olyan polinom $\mathbb{Q}[x]$-ben, amelynek nem minden együtthatója egész, mégis egész értéket vesz föl minden egész helyen?

10*. Tegyük fel, hogy $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, és $f(n) \mid g(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $f(x) \mid g(x)$ igaz $\mathbb{Q}[x]$-ben (de $\mathbb{Z}[x]$-ben nem feltétlenül).

11. Van-e olyan egész együtthatós polinom, amely minden egész helyen prímszám értéket vesz föl?

12. a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy K test fölötti legföljebb 3-adfokú polinomnak nincs gyöke K-ban, akkor az irreducibilis.
b) Adjunk meg olyan $\mathbb{Z}[x]$-beli polinomot, amelynek nincs gyöke $\mathbb{Z}$-ben, de nem irreducibilis.
c) Adjunk meg olyan $\mathbb{R}[x]$-beli 4-edfokú polinomot, amelynek nincs gyöke $\mathbb{R}$-ben, de nem irreducibilis.

Hf1. Keressük meg az $2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4$ polinom összes gyökét $\mathbb{C}$-ben, és írjuk fel a polinomot $\mathbb{C}$ fölött lineáris tényezők szorzataként!

Hf2. Keressük meg az összes másod- és harmadfokú irreducibilis polinomot a 2-elemű test $\mathbb{Z}_2$ fölött.

Hf3. Bontsuk föl az $x^4 + 4$ polinomot $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis tényezők szorzatára.