

1. Melyik irreducibilis  $\mathbb{Q}[x]$ -ben az alábbi polinomok közül?
  - a)  $x^2 + x + 1$
  - b)  $3x^5 - 6x^3 + 2x - 2$
  - c)  $x^6 + 1$
  - d)  $x^5 + 4$
2. Legyen  $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ .
  - a) Bontsuk fel  $f(x)$ -et irreducibilis polinomok szorzatára  $\mathbb{R}$ , illetve  $\mathbb{C}$  fölött!
  - b) Bizonyítsuk be, hogy  $f(x)$  irreducibilis  $\mathbb{Z}$  fölött!
  - c) Bizonyítsuk be, hogy  $f(x)$  reducibilis  $GF(2)$ ,  $GF(3)$  és  $GF(5)$  fölött!
  - d)\* Bizonyítsuk be, hogy  $f(x)$  reducibilis  $GF(p)$  fölött minden  $p$  prímre.
3. (Gyökök és együtthatók közti összefüggés) Legyen  $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$ . Bizonyítsuk be, hogy minden  $0 \leq k \leq n$  esetén  $(-1)^{n-k}b_k$  az összes olyan  $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_{n-k}}$  szorzat összege, ahol  $\{i_1, \dots, i_{n-k}\}$  az  $\{1, \dots, n\}$  halmaz  $n - k$  elemű részhalmaza.
4. Legyenek  $a$ ,  $b$  és  $c$  az  $x^3 - x^2 + 3x + 6$  polinom három gyöke  $\mathbb{C}$ -ben. Határozzuk meg a következő kifejezések értékét.
  - a)  $a + b + c$
  - b)  $abc$
  - c)  $a^2 + b^2 + c^2$
  - d)  $ab^2 + a^2b + ac^2 + a^2c + bc^2 + b^2c$
5. Bizonyítsuk be, hogy az  $x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 1$  polinomnak nem lehet csupa valós gyöke.
6. Bizonyítsuk be, hogy ha  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ , és  $a, b \in \mathbb{Z}$ , akkor  $a - b \mid f(a) - f(b)$ .
7. Van-e olyan egész együtthatós  $f$  polinom, amely az 1, 2, -1 helyeken az alábbi értékeket veszi föl?
  - a)  $f(1) = 3$ ,  $f(2) = 10$ , és  $f(-1) = 7$ ;
  - b)  $f(1) = 3$ ,  $f(2) = 10$ , és  $f(-1) = 2$ .
8. Tegyük föl, hogy az  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$  polinom 4-edfokú, 1 főegyütthatós, és  $f(1) = 10$ ,  $f(2) = 20$ ,  $f(3) = 30$ . Mennyi lehet  $f(0) + f(4)$ ?
- Hf1.** Számítsuk ki az  $x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 - 2$  és az  $x^4 - x^3 - x - 1$  polinom legnagyobb közös osztóját.
- Hf2.**  $x^4 + 6x^2 - 9x - 3$  irreducibilis-e  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z}_5$ , illetve  $\mathbb{Z}_2$  fölött?
- Hf2.** Számítsuk ki a  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  kifejezés értékét, ha  $a$ ,  $b$  és  $c$  a  $2x^3 - x^2 + 4x + 1$  polinom gyökei.