1. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1&-2&-3\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-1&2\\2&3\\3&4\end{bmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehet:

$$A+A,\quad A+B,\quad AB,\quad AC,\quad AC+2C,\quad AD-3D,\quad D^2,\quad CC^T,\quad BC,\quad CB.$$

2. Keressünk olyan A, B, C, D, E valós négyzetes mátrixokat, melyekre:

a) $AB=0$, és $BA\neq 0$;
c) $D^2=0$, és $D\neq 0$;
b) $C^2=I$, és $C\neq \pm I$;
d) $E^2=E$, és $E\neq 0, I$.

3. Legyenek A, B tetszőleges $n\times n$-es mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy a $AB-BA$ mátrix főátlójában az elemek összege 0?

4. Számítsuk ki a következő mátrixok 101-edik hatványát:

a) $\begin{bmatrix}1&0\\0&i\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}$;

5. Mi történik egy $n\times n$-es mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi mátrixokkal megszorozzuk?

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&1&\dots&0\\1&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{bmatrix}$$

6. Igazak-e minden $n\times n$-es $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ mátrixra az alábbi egyenlőségek?

a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$;
c) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$;
b) $(\mathbf{A}+\mathbf{I}_n)(\mathbf{A}-\mathbf{I}_n)=\mathbf{A}^2-\mathbf{I}_n^2$;
d) $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$.

7. Mennyi az összes olyan $k\times n$-es mátrix összege, amelyekben csak 0 és 1 fordul elő?

8. A megadott $n\times n$-es A mátrixokra mi a hatása az $\mathbf{x}\mapsto A\mathbf{x}$, $X\mapsto AX$, $X\mapsto XA$ leképezéseknek, ahol $\mathbf{x}$ n-dimenziós oszlopvektort (azaz $n\times 1$-es mátrixot), X pedig $n\times n$-es mátrixot jelöl. Hogyan hatnak ezek a mátrixok az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,... vektorokon? Melyek azok a mátrixok, amelyekkel való balszorzás az $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n$ egység oszlopvektorokat egymás között permutálja?

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

9. Hány inverzió van az alábbi permutációkban?

a) $1,2,3,4$; b) $2,1,3,4$; c) $2,4,3,1$; d) $4,3,2,1$; e) $1,2,\dots,n$;
f) $n,n-1,\dots,1$; g) $n+1,n+2,\dots,2n,1,2,\dots,n$; h) $1,3,\dots,2n-1,2,4,\dots,2n$.

Hf1. Adjuk meg a lehető legkisebb fokú olyan f polinomot, amely a $0,1,2$ helyeken a $g(x)=x^3-x+3$ polinommal azonos értéket vesz föl, de $f(-1)=5$.

Hf2. Keressünk olyan C négyzetes mátrixot, amelyre $C^3=0$, és $C^2\neq 0$

Hf3. Számítsuk ki a $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^{101}$ mátrixot.