1. Hány megoldása van azoknak az egyenletrendszereknek a valós számok körében, amelyeknek a bővített mátrixa a következő redukált lépcsős alakra hozható? Amelyiknek több megoldása is van, annak adjuk meg legalább három különböző megoldását!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket:

a) $$\begin{aligned} x+2y-z&=2 \\ 3x-y+2z&=7 \\ x-z&=-2 \\ 2x+y+z&=7 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x+y+z&=4 \\ -x+y-z&=2 \\ 2x+y+2z&=1 \\ 4x+4y+4z&=1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x+y+z&=1 \\ y+z+u&=2 \\ z+u+x&=-1 \\ u+x+y&=4 \end{aligned}$$

3. Az a és b értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek? Adjuk is meg a megoldásokat ezekben az esetekben!

$$\begin{aligned} 2x+y+z&=4 \\ x+2y-z&=-1 \\ x-y+2z&=a \\ x+by+z&=3 \end{aligned}$$

4. Legyen adva egy k egyenletből és n ismeretlenből álló racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer. Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetések közül.

a) Ha $k \le n$, akkor az egyenletrendszernek létezik megoldása.
b) Ha $k > n$, akkor az egyenletrendszernek nem létezik megoldása.
c) Ha $k < n$, és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor végtelen sok megoldása van.
d) Ha $k > n$, és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor csak egy megoldása van.
e) Ha létezik valós megoldás, akkor létezik (csupa) racionális megoldás is.

5. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát és, ha van, a mátrix inverzét is:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

6. Hogyan változik egy $n \times n$-es mátrix determinánsa, ha tükrözzük a négyzet négy különböző szimmetriatengelyére? Hát ha elforgatjuk 90, 180, ill. 270 fokkal?

7. Mi egy $n \times n$-es mátrix ($n \ge 3$) determinánsának az értéke, ha a mátrix minden sora számtani sorozat?

8. Számítsuk ki az alábbi $n \times n$-es determinánsokat:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Hf1. Adjunk meg egy olyan három egyenletből álló lineáris egyenletrendszert, amelynek nincs megoldása, de bármely két egyenletnek van közös megoldása.

Hf2. Számítsuk ki annak az $n \times n$-es determinánsnak az értékét, amelynek főátlójában csupa 1-es, a mellékátló a főátlón kívüli részén csupa 2-es, mindenhol máshol pedig 0 áll.

Hf3. Mik a lehetséges értékei annak a 4×4-es determinánsnak, amelynek csak 0 és 1 elemei vannak, és ezek közül négy, öt, illetve hat 1-es?