1. Legyen A egy 5×5-ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, és $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$ mátrixoknak?

2. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi mátrix determinánsa $\prod\limits_{i>j}(a_i - a_j)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ & & & \dots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

3. A Cramer-szabály segítségével számítsuk ki y értékét, ha x, y és z kielégítik a következő egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

4. Melyek alkotnak vektorteret $\mathbb{R}$ fölött az alábbiak közül? A köztük szereplő vektorterek hány dimenziósak?

a) 3×3-as valós felső háromszögmátrixok a szokásos műveletekkel;
b) invertálható 2×2-es valós mátrixok;
c) a legföljebb 5-ödfokú valós polinomok;
d) azok a legföljebb 4-edfokú valós polinomok, amelyeknek gyöke a -1;
e) a valós számpárok az $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$ összeadásra és $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ skalárral való szorzásra nézve;
f) $\mathbb{C}$ a komplex számok összeadására és valóssal való szorzására nézve.

5. Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ lineárisan független vektorok egy vektortérben. Függetlenek-e a következő vektorok?

a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n$
b) $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_1$
c) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_1$

6. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^n$-ben n vektor akkor és csak akkor alkot bázist, ha az n vektorból mint oszlopokból alkotott mátrix determinánsa nem 0.

7. Számítsuk ki a következő (valós) mátrixok rangját (ahol paraméter van, ott annak függvényében)! Adjunk meg annyi független sort, és annyi független oszlopot, mint amennyi a mátrix rangja!

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$

8. Legyen $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,2)\}$ az $\mathbb{R}^3$ vektortér egy bázisa. Adjuk meg a $(3,2,1)$ vektor koordinátáit a $\mathcal{B}$ bázisban, és határozzuk meg azt az elemét $\mathbb{R}^3$-nek, amelynek koordinátavektora a $\mathcal{B}$ bázisban $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Hf1. Oldjuk meg az $AX = B$ mátrixegyenletet, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Hf2. Keressünk olyan vektort az $\mathbb{R}^4$ vektortérben, amely az $(1,2,-1,0), (1,1,1,1), (0,1,-1,3)$ vektorokkal együtt bázist alkot.

Hf3. Bizonyítsuk be, hogy ha $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ lineárisan független, de $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}\}$ és $\{\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ lineárisan összefüggők, akkor $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ esetén $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ is lineárisan független!