1. Keressük ki az izomorfakat az alábbi vektorterek(?) közül a zárójelben megadott test fölött! ($K^{n\times m}$ a K-beli együtthatós $n \times m$-es mátrixok terét jelöli.)

a) $\mathbb{R}^6$ ($\mathbb{R}$); b) $\mathbb{C}^3$ ($\mathbb{R}$); c) $\mathbb{C}^3$ ($\mathbb{C}$);
d) $\mathbb{R}^{3\times 2}$ ($\mathbb{R}$); e) a sík egybevágóságai ($\mathbb{R}$); f) $\{\, p \in \mathbb{Z}_2[x] \mid x^2 \mid p, \deg p \le 9 \,\}$ ($\mathbb{Z}_2$);
g) $\mathbb{Z}_3^9$ ($\mathbb{Z}_3$); h) $\mathbb{Z}_2^{3\times 3}$; i) $\{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{Z}_2^9 \mid x_1 + x_9 = 0\,\}$ ($\mathbb{Z}_2$).
j) $\{\, A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid$ az A-beli sorösszegek mind 0-k $\}$ ($\mathbb{R}$);
k) $\{\, p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \le 10,\ p$ mint függvény páros $\}$ ($\mathbb{R}$);

2. Melyik leképezések lineárisak a következők közül? A lineárisaknak adjuk meg a mátrixát a standard bázisban.

a) az $\mathbb{R}^2$ sík tükrözése az $x = 2$ egyenesre;
b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, ahol $\varphi((x, y, z)) = (x + y, x + y)$;
c) az a leképezés, amely minden $\mathbb{R}^2$-beli vektorhoz a hosszát rendeli;
d) a 2×2-es valós mátrixokon a mellékátlóra való tükrözés;
e) a komplex konjugálás a $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren;
f) egy adott $a + bi$ komplex számmal való szorzás a $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren;
g) a sík α szögű elforgatása az origó körül.

3. Adjuk meg a következő lineáris leképezések mátrixát a megadott bázisban, illetve bázispárban:

a) az $y = x$ egyenesre való tükrözés, $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\,\}$;
b) az $y = x$ egyenesre való tükrözés, $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\,\}$;
c) az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 1)\,\}$;
d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, amelyre $\varphi(1, 2, 1) = (0, 2, 1)$, $\varphi(1, 1, 1) = (1, 0, 0)$, $\varphi(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$, a standard bázisban;
e) $p(x) \mapsto p'(x)$ a legföljebb másodfokú valós polinomok terén, a standard $\{\,1, x, x^2\,\}$ bázisban;
f) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x + y, y, x)$, $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1), (2, 0)\,\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, 1)\,\}$ bázispárban;
g) Az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés standard bázisban.

4. Számítsuk ki az $f : (x, y, z) \longmapsto (x + y - 2z, x + z, 2x + y - z, -x - z)$ leképezés mátrixának a rangját! Hány dimenziós f képtere és magtere? Adjuk meg a képtérnek és a magtérnek egy-egy bázisát!

5. Adjunk meg olyan lineáris transzformációt az $\mathbb{R}^3$ vektortéren, amelyre

a) $0 \ne \operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Im}\varphi$;
b) $\operatorname{Ker}\varphi$ 1 dimenziós, és $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{\,\mathbf{0}\,\}$;
c) $\operatorname{Im}\varphi$ 2 dimenziós, és φ az $\operatorname{Im}\varphi$ minden vektorát önmagába viszi;
d) $\varphi^3 = 0$, de $\varphi^2 \ne 0$.

Hf1. Hány olyan 1 rangú 3×3-as valós mátrix van, amelynek minden eleme 0 vagy 1?

Hf2. Benne van-e a $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ vektor az $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (3, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 3, -3)$ vektorok által kifeszített altérben? Ha igen, fejezzük ki $\mathbf{v}$-t az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha nem, keressünk olyan $\mathbf{w} \in \langle\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\,\rangle$ vektort, amely $\mathbf{v}$-től minél kevesebb komponensben tér el.

Hf3. Bizonyítsuk be, hogy az antiszimmetrikus mátrixok (azaz, amelyek kielégítik az $A^T = -A$ feltételt) alteret alkotnak a 3×3-as valós mátrixok terében. Adjuk meg ennek az altérnek egy bázisát.