

1. Keressük meg az alábbi mátrixok összes (komplex) sajátértékét és sajátvektorát! Írjuk le az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ és $\mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x}$ leképezések hatását \mathbb{R}^2 -ben!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Mutassuk meg, hogy bármely 3×3 -as valós mátrixnak van valós sajátvektora.
3. Melyek igazak egy A négyzetes mátrixra? Amelyik igaz, azt bizonyítsuk, amelyik nem, arra adjunk ellenpéldát.
- \mathbf{v} sajátvektora A -nak $\Rightarrow \mathbf{v}$ sajátvektora A^2 -nek;
 - \mathbf{v} sajátvektora A^2 -nek $\Rightarrow \mathbf{v}$ sajátvektora A -nak;
4. Legyen A 2×2 -es valós mátrix. Tegyük föl, hogy az alábbi négy állítás közül pontosan egy nem igaz. Melyik lehet az?
- A rangja legfeljebb 1.
 - A -nak van sajátvektora.
 - $A^2 = A$.
 - A 0 sajátértéke A -nak.
5. A mátrix felírása nélkül állapítsuk meg, mik a (valós) sajátértékei és sajátvektorai a következő lineáris transzformációknak:
- \mathbb{R}^3 tükrözése az $(1, 2, 2)$ vektorra merőleges, az origón átmenő síkra;
 - \mathbb{R}^3 90° -os elforgatása az x tengely körül;
 - \mathbb{R}^2 merőleges vetítése az $y = 2x$ egyenesre;
 - az $(1, 0, 2)$ vektorral való vektoriális szorzás \mathbb{R}^3 -ben;
6. Keressük meg azt a 3×3 -as mátrixot, amelynek sajátértékei 1, 2 és 3, és ezekhez tartozó sajátvektorok rendre $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $(0, 1, -1)$ és $(1, 0, 2)$.
- Hf1.** Adjuk meg a $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \times (1, 2, 3)$ transzformációt az \mathbb{R}^3 standard bázisában, illetve a $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (2, -1, 0), (3, 6, -5)\}$ bázisban.
- Hf2.** Adjuk meg az $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z, u) = (x + y + u, 2x - y + 3z - u, x + 4y - 3z + 4u)$ lineáris leképezés magterének és képterének egy-egy bázisát.
- Hf3.** Bizonyítsuk be, hogy ha 0 sajátértéke A^2 -nek, akkor sajátértéke A -nak is.