

1. Melyik mátrixok diagonalizálhatók \mathbb{C} fölött a következők közül? $A^n = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Mi lesz az alábbi mátrixok Jordan-normálalakja?

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{C}); \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Maximum hány olyan páronként nem hasonló (komplex) mátrixot lehet megadni, amelynek a karakterisztikus polinomja $(x-1)^3 \cdot (x-2)^2$?

4. Van-e olyan komplex elemű mátrix, amelynek a karakterisztikus és minimálpolinomja a következő?

$$\begin{array}{ll} \text{a) } p_1(x) = (x-1)^2(x-2)^3, & m_1(x) = (x-1)(x-2)^2; \\ \text{b) } p_2(x) = x^6 + x + 1, & m_2(x) = x^2 + x + 1; \\ \text{c) } p_3(x) = (x-1)^2(x-2)^3(x-5), & m_3(x) = (x-1)^2(x-2)^2; \\ \text{d) } p_4(x) = (x^3 - x - 4)^2, & m_4(x) = (x^3 - x - 4). \end{array}$$

5. Van-e olyan 3×3 -as mátrix \mathbb{Q} fölött, amelynek minimálpolinomja

$$\begin{array}{l} \text{a) } x^2 - 2; \\ \text{b) } x^2 + x? \end{array}$$

6. Az alábbi mátrixok közül melyek hasonlóak az $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixhoz?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

7. Adjunk meg ortogonális, illetve ortonormált bázist az \mathbb{R}^4 $(1, 2, -1, 0)$, $(2, 1, 0, 1)$ és $(1, -1, 1, -1)$ vektorok által generált alterében.