1. *Keressük meg az alábbi mátrixok összes (komplex) sajátértékét és sajátvektorát! Írjuk le az* $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ *és* $\mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x}$ *leképezések hatását* $\mathbb{R}^2$*-ben!*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A sajátértékei az $|A\lambda I| = \lambda^2 - 1 = 0$ megoldásai: ± 1, az 1-hez tartozó sajátvektorai az $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megoldásaiból $t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, a -1-hez tartozó sajátvektorai pedig az $(A + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megoldásaiból $t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$.

B-nek valós sajátértékei és sajátvektorai nincsenek, komplex sajátértékei $\pm i$, az i-hez tartozó sajátvektorai az $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$-nek, a $-i$-hez tartozó sajátvektorai a $\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$-nek nem $\mathbf{0}$ skalárszorosai.

C karakterisztikus polinomja $|C - \lambda I| = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, így C sajátértékei 1 és 2. Az 1-hez tartozó sajátvektorok a $(C - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nem nulla megoldásai: $\begin{bmatrix} -t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \frac{t}{2} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$, a 2-höz tartozó sajátvektorok pedig a $(C - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megoldásaiból $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$.

D karakterisztikus polinomja $-\lambda(\lambda - 1)^2$, sajátértékei 0 és 1, a 0-hoz tartozó sajátvektorai $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ nem $\mathbf{0}$ skalárszorosai, az 1-hez tartozó sajátvektorai a $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektorok nem $\mathbf{0}$ lineáris kombinációi.

Az A mátrixszal való balszorzás az $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektort $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$-be, tehát az $y = x$ egyenesre való tükrözésnél kapott tükörképébe viszi. A B mátrixszal való balszorzás az $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektort $\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$-be viszi, tehát ez a leképezés az origo körüli 90°-os elforgatás. (A D vektor sajátvektoraiból és sajátértékeiből leolvasható, hogy a D-vel való balszorzás pedig $\mathbb{R}^3$-nak a $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektorok síkjára való vetítése az $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor irányában.)

2. *Mutassuk meg, hogy bármely* 3×3*-as valós mátrixnak van valós sajátvektora.*

Megoldás: Egy 3×3-as valós mátrix karakterisztikus polinomja ($|A - \lambda I|$) harmadfokú valós polinom, így van valós gyöke (például azért, mert a nem valós gyökei konjugált párokat alkotnak). Ehhez a valós λ-hoz az $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer adja meg a sajátvektorokat, és ehhez a Gauss-módszer segítségével találunk valós megoldást, tehát van valós sajátvektor.

3. *Melyek igazak egy A négyzetes mátrixra? Amelyik igaz, azt bizonyítsuk, amelyik nem, arra adjunk ellenpéldát.*

a) $\mathbf{v}$ *sajátvektora* A*-nak* $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ *sajátvektora* A^2*-nek;*

b) $\mathbf{v}$ *sajátvektora* A^2*-nek* $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ *sajátvektora* A*-nak;*

Megoldás: a) Ha $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, akkor $A^2\mathbf{v} = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$, tehát $\mathbf{v}$ sajátvektora A^2-nek λ^2 sajátértékkel.

b) Ez az állítás nem igaz: vegyünk egy olyan lineáris transzformációt, amely egy $\mathbf{v}$ és egy $\mathbf{w}$ független vektort felcserél; ennek a négyzete helybenhagyja $\mathbf{v}$-t (és $\mathbf{w}$-t is).

Ilyen például a sík tükrözése a $y = x$ egyenesre. Ennek $\mathbf{i}$ nem sajátvektora, de a leképezés négyzete az identikus transzformáció, amely mindent helybenhagy, tehát minden vektor sajátvektora 1 sajátértékkel.

4. *Legyen A 2×2-es valós mátrix. Tegyük föl, hogy az alábbi négy állítás közül pontosan egy nem igaz. Melyik lehet az?*

a) A rangja legföljebb 1.
b) A-nak van sajátvektora.
c) $A^2 = A$.
d) A 0 sajátértéke A-nak.

Megoldás: Az, hogy 0 sajátértéke A-nak, azt jelenti, hogy van olyan nem nulla vektor, amit A $\mathbf{0}$-ba visz, azaz $\operatorname{Ker} A \neq 0$. A dimenziótétel miatt ez 2×2-es mátrixra ekvivalens az a) állítással. Mivel pontosan egy állítás hamis, a)-nak és a vele ekvivalens d)-nek igaznak kell lennie. Viszont d)-ből következik b), tehát csak a c) lehet hamis. Ilyen transzformáció valóban van: az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ báziselemekre hasson úgy, hogy $\mathbf{i} \mapsto \mathbf{j} \mapsto 0$ (ennek a négyzete 0), vagyis az A mátrix $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

5. *A mátrix felírása nélkül állapítsuk meg, mik a (valós) sajátértékei és sajátvektorai a következő lineáris transzformációknak:*

a) $\mathbb{R}^3$ tükrözése az $(1, 2, 2)$ vektorra merőleges, az origón átmenő síkra;
b) $\mathbb{R}^3$ $90°$-os elforgatása az x tengely körül;
c) $\mathbb{R}^2$ merőleges vetítése az $y = 2x$ egyenesre;
d) az $(1, 0, 2)$ vektorral való vektoriális szorzás $\mathbb{R}^3$-ben;

Megoldás:

a) A sík nem nulla vektorai lesznek sajátvektorok 1 sajátértékkel, a síkra merőleges vektorok (tehát az $(1, 2, 2)$ nemnulla többszörösei) -1 sajátértékű sajátvektorok. A $\mathbf{0}$ vektort nem tekintjük sajátvektornak!

b) Csak az x tengellyel párhuzamos nem nulla vektorok lesznek sajátvektorok 1 sajátértékkel.

c) Az egyenessel párhuzamos nem nulla vektorok ($t(1, 2)$, ahol $t \neq 0$) sajátvektorok 1 sajátértékkel, a síknak az egyenesre merőleges nem nulla vektorai ($t(2, -1)$, ahol $t \neq 0$) pedig sajátvektorok 0 sajátértékkel.

d) $(1, 0, 2) \times \mathbf{v}$ merőleges $\mathbf{v}$-re, tehát csak akkor lehet egyúttal párhuzamos is, ha a vektoriális szorzat $\mathbf{0}$, azaz $\mathbf{v}$ párhuzamos az $(1, 0, 2)$ vektorral. Így a sajátvektorok ebben az esetben a $t(1, 0, 2)$, $(t \neq 0)$ vektorok 0 sajátértékkel. (*Megjegyzés:* ha a transzformáció mátrixát komplex mátrixnak tekintjük, akkor több sajátvektor és sajátérték is lesz — a b) feladatban is —, de ez a mátrixnak a $\mathbb{C}^3$-ön való hatására érvényes.)

6. *Keressük meg azt a 3×3-as mátrixot, amelynek sajátértékei 1, 2 és 3, és ezekhez tartozó sajátvektorok rendre $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $(0, 1, -1)$ és $(1, 0, 2)$.*

Megoldás: Olyan mátrixot kell keresni, amely az adott vektorokat az 1-szeresükbe, 2-szeresükbe, illetve 3-szorosukba viszi. Azaz az

$$X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenletet kell megoldani. Mivel a megadott három vektor lineárisan független (ha nem lenne az, akkor nem is lenne egyértelmű a keresett mátrix, vagy esetleg nem létezne), ez megoldható úgy, hogy beszorzunk a jobb oldali mátrix inverzével:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 8 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$